

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de docteur

de l'**Université de Cergy-Pontoise**

Ecole doctorale **Sciences et Ingénierie**

Aline ROUMY

Egalisation et décodage conjoints : méthodes Turbo

soutenue le 24 octobre 2000 devant le jury composé de

Alain Glavieux

Président

Pierre Duhamel

Rapporteurs

Luc Vandendorpe

Robert Vallet

Examineurs

Patrick Duvaut

Inbar Fijalkow

Directeur de thèse

Didier Pirez

Sommaire

Notations	7
Abréviations	9
Introduction générale	11
1 Quelques notions de codage	17
1.1 Introduction au codage de canal	17
1.2 Codes en bloc linéaires	18
1.2.1 Structure d'un code bloc	18
1.2.2 Critère d'optimisation d'un code bloc	19
1.3 Codes convolutifs	19
1.3.1 Structure d'un code convolutif	19
1.3.2 Critère d'optimisation d'un code convolutif	20
1.4 Choix d'une classe de codes	21
1.4.1 Définition du $\frac{E_b}{N_0}$ utile	22
1.4.2 Critères de comparaison et choix	23
1.5 Performances asymptotiques des codes convolutifs	24
1.5.1 Performances sur le canal additif blanc gaussien non codé	24
1.5.2 Fonction de transfert et performances d'un code convolutif	24
1.5.3 Gain de codage	25
1.6 Entrelacement	26
1.7 Conclusion	26
2 De l'égalisation	27
2.1 Introduction	27
2.2 Le canal de transmission	27
2.2.1 Modèle du canal	28
2.2.2 Canaux sélectifs en fréquence	29
2.2.2.1 Transmission filaire	29
2.2.2.2 Transmission sans fil	30
2.2.3 Modèle discret équivalent du canal et statistiques suffisantes	30
2.3 Présentation des égaliseurs	31
2.3.1 Égaliseur à structure non-imposée	32
2.3.1.1 Maximum <i>a posteriori</i> par séquence	32
2.3.1.2 Maximum <i>a posteriori</i> par symbole	36
2.3.2 Égaliseur à structure imposée	38
2.3.2.1 Égaliseur linéaire	38
2.3.2.2 Égaliseur de type DFE	40
2.4 Comparaison et performances des égaliseurs	41
2.5 Caractérisation des canaux	44
2.5.1 Canal à bruit additif blanc gaussien	45

2.5.2	Canaux à 2 trajets	45
2.5.3	Canaux à 3 trajets	47
2.5.3.1	Cas d'une erreur isolée	47
2.5.3.2	Cas des canaux à 2 zéros complexes conjugués et de module 1	47
2.5.3.3	Cas des canaux à 2 zéros réels inverses	51
2.5.3.4	Lien avec les canaux Proakis B et C	51
2.5.4	Conclusion sur la caractérisation des canaux	52
2.6	Conclusion	52
3	Turbo-égalisation : principe et performances	55
3.1	Introduction	55
3.2	Egalisation et décodage disjoints	55
3.3	Problème de l'égalisation et du décodage conjoints	56
3.3.1	Solution optimale	57
3.3.2	Solutions sous-optimales	57
3.4	Méthodes Turbo	58
3.5	Turbo-égalisation : principe	60
3.5.1	Description de l'égaliseur	60
3.5.2	Convertisseur M-aire binaire	62
3.5.3	Description du désentrelaceur	63
3.5.4	Description du décodeur	63
3.5.5	Calcul de d_n^p	64
3.5.6	Conclusion	65
3.6	Turbo-égalisation : performances et première analyse	65
3.6.1	Conditions de simulation	65
3.6.2	Allure générale des courbes de performances	66
3.6.3	Le point de déclenchement	67
3.6.4	L'effet d'avalanche	69
3.6.5	Remarque sur la lecture des courbes	70
3.7	Conclusion	71
4	Turbo-égalisation : analyse	73
4.1	Introduction	73
4.2	Bornes pour l'égalisation et le décodage conjoints	73
4.2.1	Le récepteur disjoint optimal	75
4.2.2	Le récepteur conjoint optimal	75
4.2.3	Choix d'un exemple simple	76
4.3	Comparaison du Turbo-égaliseur avec les bornes	77
4.4	Analyse fonctionnelle	79
4.4.1	Principe de l'analyse fonctionnelle	80
4.4.1.1	Modélisation des estimations de d_n	81
4.4.1.2	Puissance d'erreur normalisée pour le code	82
4.4.1.3	Puissance d'erreur normalisée pour l'annuleur d'interférence	82
4.4.1.4	Puissance d'erreur normalisée pour le DFE	83
4.4.1.5	Puissance d'erreur normalisée pour l'égaliseur MAP symbole	84
4.4.2	Application au cas des canaux sélectifs en fréquence	84
4.4.2.1	Canaux, où le Turbo-égaliseur tend vers la borne BABG codé	84
4.4.2.2	Canaux, où le Turbo-égaliseur ne tend pas vers le BABG codé	86
4.4.3	Causes du mauvais fonctionnement du décodeur : validité du modèle BABG	88
4.5	Conclusion	90
5	Détection multi-utilisateurs et décodage conjoints : Turbo-CDMA	93

5.1	Introduction	93
5.2	Etat de l'art	94
5.3	Position du problème	95
5.3.1	Modèle CDMA sur canal multitrajets, asynchrone et gaussien	95
5.3.2	Problème de la détection multi-utilisateurs et du décodage conjoints	98
5.3.3	Conditions de simulation et définition	99
5.4	Récepteur Turbo-CDMA	101
5.4.1	Principe	102
5.4.2	Egaliseur de l'itération 1	103
5.4.2.1	DFE multi-utilisateurs et critère EQM symbole	103
5.4.2.2	DFE multi-utilisateurs et critère EQM bloc	105
5.4.2.3	DFE multi-utilisateurs et critère EQM bloc d'utilisateur	106
5.4.2.4	DFE mono-utilisateur et critère EQM bloc d'utilisateur	107
5.4.2.5	Ordre de démodulation	108
5.4.2.6	Performances et complexité des égaliseurs DFE	108
5.4.3	Egaliseur de l'itération $p > 1$	110
5.4.3.1	Annuleur d'interférences multi-utilisateurs	110
5.4.3.2	Annuleur d'interférences mono-utilisateur	112
5.4.3.3	Comparaisons des méthodes mono et multi-utilisateurs	114
5.4.4	Performances du récepteur Turbo-CDMA	115
5.4.5	Amélioration de la structure: récepteur Full Turbo-CDMA	117
5.4.5.1	Structure Full Turbo-CDMA	117
5.4.5.2	Nouveau DFE et ses performances	118
5.4.5.3	Performances du récepteur Full Turbo-CDMA	119
5.5	Conclusion	121

Conclusions et perspectives 123

A Caractérisation des canaux sévères 127

A.1	Canaux à 3 trajets	127
A.1.1	Cas des canaux à 2 zéros complexes conjugués, de module 1	127
A.1.2	Cas des canaux à 2 zéros réels inverses	128

B Egaliseur DFE pour le CDMA 129

B.1	Méthodes multi-utilisateurs	129
B.1.1	Critère EQM symbole	129
B.1.1.1	Notations	129
B.1.1.2	Calcul de l'EQM	130
B.1.1.3	Rappel: solution de Wiener	130
B.1.1.4	Calcul de \mathbf{p}	130
B.1.1.5	Calcul de \mathcal{R}	131
B.1.1.6	Calcul de \mathcal{R}^{-1}	131
B.1.1.7	Calcul des vecteurs du DFE	132
B.1.2	Critère EQM bloc	132
B.1.2.1	Notations	132
B.1.2.2	Calcul de l'EQM	133
B.1.2.3	Calcul de la matrice de covariance $\text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\}$	133
B.1.2.4	Optimisation de \mathbf{F} pour \mathbf{B} arbitraire	133
B.1.2.5	Optimisation de \mathbf{B}	134
B.1.2.6	Expressions littérales des matrices optimales $\bar{\mathbf{F}}$ et $\bar{\mathbf{B}}$	134
B.1.3	Critère EQM bloc d'utilisateur	135
B.1.3.1	Notations	135

	B.1.3.2	Expressions littérales des matrices optimales $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$	135
B.2		Méthode mono-utilisateur	136
	B.2.1	Critère EQM bloc d'utilisateur	136
		B.2.1.1 Notations	136
		B.2.1.2 Expressions littérales des matrices optimales $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$	137
C		Annuleur d'interférences pour le CDMA	139
	C.1	Méthode multi-utilisateurs	139
		C.1.1 Critère EQM symbole	139
			C.1.1.1 Notations 139
			C.1.1.2 Calcul EQM 140
			C.1.1.3 Solution de Wiener 140
			C.1.1.4 Calcul de \mathbf{p} 140
			C.1.1.5 Calcul de \mathcal{R} 141
			C.1.1.6 Calcul de \mathcal{R}^{-1} 141
			C.1.1.7 Calcul de \mathcal{A}' et \mathcal{C}' 141
			C.1.1.8 Calcul des matrices de l'annuleur d'interférences 142
			C.1.1.9 Ecriture bloc de l'annuleur d'interférences 143
	C.2	Méthode mono-utilisateur	144
		C.2.1 Critère EQM symbole	144
			C.2.1.1 Notations 144
			C.2.1.2 Calcul des matrices de l'annuleur d'interférences 145
		Bibliographie	147

Notations

Cas mono-utilisateur

a_m	bit d'information,
c_m	bit codé,
c_n	bit codé et entrelacé,
d_n	symbole émis,
h_j	réponse impulsionnelle du canal discret,
$H(z)$	Transformée en z ou fonction de transfert du canal discret,
w_n	bruit blanc de la transmission,
r_n	échantillons reçus,
y_n	sortie pondérée de l'égaliseur,
$\Lambda(c_n)$	rapport de vraisemblance relatif au bit c_n ,
$\tilde{\Lambda}(c_n)$	rapport des probabilités <i>a posteriori</i> relatives au bit c_n ,
\hat{a}_m	estimation du bit d'information a_m ,
d_n^p	estimation à l'itération p du récepteur Turbo du symbole émis d_n .

Cas multi-utilisateur

K	nombre d'utilisateurs : $1 \leq k \leq K$,
Q	facteur d'étalement,
N	nombre de symboles par utilisateur : $1 \leq n \leq N$,
W	taille maximale des canaux de transmission discrets,
Q_{N+W-1}	longueur de la séquence d'échantillons reçus : $1 \leq l \leq QW + W - 1$,
$a_m^{(k)}$	bit d'information de l'utilisateur k ,
$c_m^{(k)}$	bit codé de l'utilisateur k ,
$c_n^{(k)}$	bit codé et entrelacé de l'utilisateur k ,
$d_n^{(k)}$	symbole émis par l'utilisateur k ,
$\mathbf{d}^{(k)}$	vecteur de N symboles émis par l'utilisateur k ,
\mathbf{d}	vecteur de KN symboles contenant les N symboles émis par les K utilisateurs,
$\mathbf{H}^{(k)}$	matrice de taille (Q_{N+W-1}, N) relative à la transmission CDMA de l'utilisateur k ,
\mathbf{H}	matrice de taille (Q_{N+W-1}, KN) relative à la transmission CDMA des K utilisateurs,
w_l	bruit de la transmission,
\mathbf{w}	vecteur contenant les Q_{N+W-1} échantillons de bruit de la transmission,
r_l	échantillons reçus,
\mathbf{r}	vecteur contenant les Q_{N+W-1} échantillons reçus,
$y_n^{(k)}$	sortie pondérée de l'égaliseur de l'utilisateur k ,
$\Lambda(c_n^{(k)})$	rapport de vraisemblance relatif au bit c_n de l'utilisateur k ,

$\tilde{\Lambda}(c_n^{(k)})$	rapport des probabilités <i>a posteriori</i> relatives au bit c_n de l'utilisateur k ,
$\hat{a}_m^{(k)}$	estimation du bit d'information a_m de l'utilisateur k ,
$d_n^p{}^{(k)}$	estimation à l'itération p du récepteur Turbo du symbole émis $d_n^{(k)}$ de l'utilisateur k .

Autres notations

$diag(\mathbf{A})$	matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux ceux de la matrice \mathbf{A} ,
$Diag(x_1 \cdots x_L)$	matrice diagonale ayant pour élément diagonaux $x_1 \cdots x_L$,
$(.)^T$	transposition,
$(.)^\dagger$	trans-conjugaison,
$\ \cdot\ $	norme L_2 .

Abréviations

Au cours de ce document, différentes abréviations sont utilisées. Nous les rappelons maintenant et en donnons leurs significations :

AI	annuleur d'interférences,
AMRC	accès multiple par répartition par code,
AMRT	accès multiple par répartition temporelle,
BABG	Bruit Additif Blanc Gaussien,
BPSK	<i>Binary Phase Shift Keying</i> ,
CDMA	<i>Code Division Multiple Access</i> ,
DFE	<i>Decision Feedback Equalizer</i> ,
EQM	Erreur Quadratique Moyenne,
EQMM	Erreur Quadratique Moyenne Minimale,
IES	Interférence Entre Symboles,
ISI	<i>Inter-Symbol Interference</i> ,
MAP	<i>Maximum a posteriori</i> ,
MMSE	<i>Minimum Mean Square error</i> ,
MUI	<i>MultiUser Interference</i> ,
RSB	Rapport Signal à Bruit,
RSBI	Rapport Signal à Bruit et Interférences,
SINR	<i>Signal to Interference and Noise Ratio</i> ,
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i> ,
TDMA	<i>Time Division Multiple Access</i> ,
TEB	Taux d'erreur binaire,
ZF	<i>Zero Forcing</i> .

Introduction générale

Parmi les nombreux domaines de recherche du traitement du signal pour les communications numériques, les transmissions à haut débit présentent un enjeu important aujourd'hui. En effet, le nombre d'utilisateurs (téléphone, internet, multimédia) des transmissions radio (boucles locales sans fil, mobiles) ou filaires (ADSL) connaît une forte augmentation et la quantité d'information à transmettre est elle aussi de plus en plus importante (internet et autres objets communicants). Aussi, les systèmes de communication des générations futures envisagent d'accroître significativement les débits transmis tout en maintenant de bonnes performances. En général, cette augmentation du débit s'accompagne d'un accroissement des distorsions. En particulier, dans le contexte des transmissions telles que les radiocommunications, les canaux de propagation sont dispersifs dans le temps à cause de la présence de multitrajets de propagation issus de la réflexion des ondes radios sur les bâtiments ou sur les couches ionosphériques. Cet étalement temporel de la réponse du canal de propagation engendre de l'interférence entre symboles (IES) à la réception, qui augmente avec la vitesse de modulation, ce qui dégrade d'autant les performances. Aussi, dans les transmissions haut débit, l'utilisation d'égaliseurs de canaux pour compenser les effets dus au canal s'avère nécessaire.

Cependant, pour certains canaux difficiles, l'égaliseur ne peut supprimer complètement l'IES. Il en résulte une augmentation de la puissance de bruit *i.e.* une dégradation des performances par rapport au canal à bruit additif gaussien non dispersif. Il est alors possible d'améliorer ces performances en ajoutant un code correcteur d'erreurs à l'émission. En fait, l'amélioration apportée par l'ajout d'un tel code n'est effective que si les erreurs dues au canal sont statistiquement indépendantes. Or, cette hypothèse n'est pas vérifiée dans le cas de canaux dispersifs dans le temps, qui peuvent engendrer des paquets d'erreurs. Aussi, un entrelaceur placé après le code et son homologue désentrelaceur placé avant le décodeur assure la quasi-décorrélation des erreurs au moment du décodage. C'est pourquoi, la plupart des normes actuelles utilisent ce codage correcteur d'erreurs (connu également sous le terme *codage de canal*) qui permet de protéger efficacement les données transmises vis-à-vis d'erreurs. La chaîne de communication comporte alors :

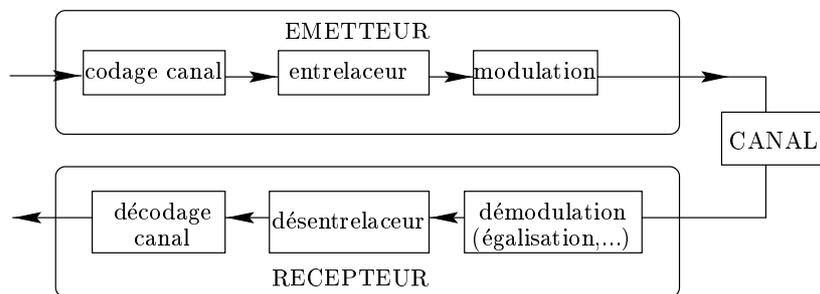


FIG. 1 – Chaîne de communication

Dans cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement au récepteur. Rappelons ici

que les normes déterminent uniquement les caractéristiques des émetteurs et que le choix du récepteur revient au constructeur. Jusqu'ici, les récepteurs mis en œuvre opèrent (en général) de manière disjointe : ils réalisent tout d'abord une égalisation suivie d'un décodage. Ainsi, dans le cas de la norme GSM, les constructeurs ont proposé tout d'abord des récepteurs, où l'égalisation est effectuée avec décision dure. Puis, certains constructeurs ont pondéré l'information sortant de l'égaliseur, à l'aide de l'estimation de la puissance d'erreur. Néanmoins, cette approche demeure sous-optimale car disjointe. La solution optimale est alors l'approche conjointe mais, celle-ci étant trop complexe, des propositions mixtes, qui répondent à la question de l'*égalité et du décodage conjoints*, sont proposées depuis. Le travail présenté dans ce document concerne ce problème.

Parmi toutes les approches sous-optimales du problème de l'égalisation et du décodage conjoints, le Turbo-égaliseur proposé en 1997 dans la thèse de C. Laot [43] nous semblait très prometteur. En effet, cette structure réalise un compromis intéressant entre complexité et bonnes performances. C'est donc cette structure que nous nous proposons d'analyser et d'améliorer dans cette thèse. La première question que nous nous posons ici peut s'appliquer à tout système sous-optimal d'égalisation et de décodage conjoints ; elle n'est donc pas spécifique au Turbo-égaliseur mais nous semble tout à fait légitime. L'observation comparée des performances du Turbo-égaliseur et de la transmission idéale d'un message codé sur un canal à bruit additif gaussien montre une perte au détriment du Turbo-égaliseur. Nous nous interrogeons tout naturellement sur les causes responsables de cet écart : nous pouvons déjà prévoir que cet écart peut être dû d'une part au canal et d'autre part à la méthode sous-optimale utilisée. De plus, nous essaierons d'isoler la perte due uniquement à la sous-optimalité du récepteur (pour un canal donné) et tenterons de l'analyser en considérant le processus itératif du Turbo-égaliseur.

Un autre problème intéressant en communications numériques concerne la répartition des ressources entre les utilisateurs. Parmi les techniques d'accès multiples, l'accès multiple à répartition de code (AMRC ou CDMA) bénéficie d'une attention toute particulière liée à sa très grande efficacité spectrale [73], qui lui vaut de figurer dans plusieurs normes (IS-95, UMTS, IMT-2000). Dans ce type de transmission, tous les utilisateurs partagent les mêmes ressources temporelles et fréquentielles et sont affectés de codes qui assurent leur séparation au niveau du récepteur. Ainsi, le signal utile d'un utilisateur donné est soumis aux distorsions du canal de transmission mais aussi aux contributions des autres utilisateurs. Si le Turbo-égaliseur peut supprimer efficacement les perturbations dues au canal dispersif en temps, nous pouvons supposer qu'une structure analogue peut supprimer en plus les contributions des autres utilisateurs. Aussi, nous nous proposons dans cette thèse d'appliquer le Turbo-égaliseur [43] au CDMA, puis d'améliorer la structure.

Puisque nous nous intéressons dans cette thèse au problème de l'égalisation et du décodage conjoints, il nous paraît indispensable de présenter l'égalisation d'une part et le décodage de canal d'autre part, tels qu'ils sont utilisés dans les récepteurs et tels que nous les avons considérés ici. Aussi, le premier chapitre propose une introduction à la problématique du codage de canal. Nous présentons les deux grandes classes de codes (en blocs ou convolutifs) et justifions notre choix de considérer les codes convolutifs. Puis, nous présentons un calcul de borne de performances pour un code, résultat que nous utiliserons lors de l'analyse du Turbo-égaliseur.

Le second chapitre est quant à lui consacré au problème de l'égalisation. Nous rappelons les structures classiques et de mise en œuvre aisée. En effet, nous ne considérons pas ici les structures à statistiques suffisantes, qui nécessitent un filtrage adapté au canal (éventuellement blanchi) analogique et considérons plutôt les structures, où ce filtrage adapté (éventuellement blanchi) est réalisé numériquement après l'échantillonnage au temps symbole. Nous proposons

ici une étude de cas de canaux, qui nous permet de définir la notion de difficulté à égaliser, lorsque l'égaliseur est optimal au sens du *maximum a posteriori* par séquence, soit l'algorithme de Viterbi.

Fort des présentations du codage d'une part et de l'égalisation d'autre part, nous présentons le problème de l'égalisation et du décodage conjoints et rappelons quelques solutions sous-optimales à ce problème. Parmi elles, nous nous intéressons tout particulièrement au Turbo-égaliseur. Notons que le Turbo-égaliseur que nous utilisons diffère légèrement de la structure originelle [43], afin de s'adapter aux normes de communications actuelles (l'entrelaceur est bit plutôt que symbole). Dans ce troisième chapitre, nous présentons donc le principe Turbo et montrons comment il est appliqué dans le cas du Turbo-égaliseur. Ensuite, nous présentons les différents modules constituant le Turbo-égaliseur et nous proposons d'en analyser les performances. Ainsi les performances dépendent du canal de transmission et caractérisons l'effet Turbo comme le gain apporté d'une itération à l'autre. Nous nous intéressons alors aux facteurs qui influencent d'une part le déclenchement de cet effet et d'autre part la valeur du gain Turbo (ou l'effet d'avalanche).

Ayant caractérisé les performances du Turbo-égaliseur, notre attention se porte, dans le quatrième chapitre, sur leur analyse. Ainsi, nous souhaitons mettre en évidence la perte due uniquement au traitement itératif. Pour ce faire, nous calculons une borne pour le récepteur optimal conjoint d'égalisation et de décodage. La différence entre cette borne et les performances du Turbo-égaliseur montre, pour un canal donné, la perte due uniquement au traitement sous optimal. Dans un développement ultérieur, nous répondons à la question « pourquoi certains canaux ne donnent pas avec le Turbo-égaliseur les performances optimales? », grâce à notre analyse fonctionnelle. Celle-ci fournit également un nouveau critère de classement des canaux pour leur traitement par un Turbo-égaliseur.

Enfin, nous proposons l'application du Turbo-égaliseur, tel qu'il est présenté et analysé dans les chapitres 3 et 4, au cas d'une transmission multi-utilisateurs CDMA. Dans ce cinquième chapitre, nous considérons le cas difficile de transmissions multitrajets, différentes pour chaque utilisateur et asynchrones. Le récepteur Turbo gère les interférences entre symboles et entre utilisateurs. Nous proposons une première structure Turbo et pour elle, définissons de nouveaux égaliseurs. De plus, pour rendre le traitement plus efficace nous proposons un nouveau critère d'ordre de démodulation pour les utilisateurs. Enfin, nous améliorons cette première structure sans augmenter la complexité de l'algorithme.

Publications de l'auteur

• Brevets

- ★ A. Roumy, D. Pirez, I. Fijalkow, Procédé et récepteur pour démoduler des signaux provenant de multi-utilisateurs, brevet déposé par Thomson-CSF Communications, le 1 Sept. 2000.
- ★ A. Roumy, D. Pirez, I. Fijalkow, Procédé et récepteur pour ordonner des signaux provenant de multi-utilisateurs, brevet déposé par Thomson-CSF Communications, le 1 Sept. 2000.

• Article de revue

- ★ A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Low-Cost Turbo Receivers for Coded Asynchronous DS-CDMA in Frequency Selective Channels," soumis à *IEEE Journal of Comm. and Networks*, special issue: Signal Processing for Multiuser Wireless Communications, le 1 janv. 2001.

• Conférences internationales à comité de lecture

- ★ A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Joint Equalization and Decoding: why choose the iterative solution?," *IEEE 50th Vehicular Technology Conference*, pp. 2989-2993, Amsterdam, The Netherlands, September 1999.
- ★ I. Fijalkow, A. Roumy, S. Ronger, D. Pirez, P. Vila, "Improved Interference cancellation for Turbo-equalization," *IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Turkey, June 2000.
- ★ A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, P. Duvaut, "Iterative Multi-user algorithm for convolutionally coded asynchronous DS-CDMA systems: Turbo-CDMA," *IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Turkey, June 2000.
- ★ A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Full Turbo receiver for coded asynchronous DS-CDMA over multipath channel," *IEEE 2nd International Symposium on Turbo-codes & Related Topics*, pp. 495-498, Brest, France, September 2000.
- ★ A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Turbo multiuser detection for coded asynchronous DS-CDMA over frequency selective channels," *IEEE Sixth International Symposium on Spread Spectrum Techniques & Applications (ISSSTA'00)*, pp. 608-612, New Jersey, USA, September 2000 (invited paper).

• Conférences nationales à comité de lecture

- ★ A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, P. Duvaut, "Quelques aspects de la Turbo-égalisation," *17th Symposium on Signal and Image processing, GretsI*, pp. 801-804, Vannes, France, September 1999.

• Présentations orales

- ★ A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Quelques aspects de la Turbo-égalisation," GDR ISIS, 29 Octobre 1999.
- ★ A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Iterative multiuser algorithms for convolutionally coded asynchronous DS-CDMA systems: Turbo-CDMA," GDR ISIS, invité d'honneur Prof. Sergio Verdú, 24 Mai 2000.
- ★ A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Iterative multiuser algorithms for convolutionally coded asynchronous DS-CDMA systems: Turbo-CDMA," Alcatel Workshop on coding, CRC Antwerp, Belgium, 29 Septembre 2000.

• Rapport

- ★ A. Roumy, "Turbo-égalisation : principe, performances et analyse," Rapport interne, ETIS, Septembre 1999.

Chapitre 1

Quelques notions de codage

Avertissement

Le présent chapitre propose une brève introduction au codage de canal, tel que nous l'avons utilisé dans cette thèse. Il ne s'agit donc pas d'une contribution au domaine du codage. En revanche, nous présentons des résultats classiques auxquels nous ferons référence par la suite.

1.1 Introduction au codage de canal

Rappelons le principe fondamental de communication selon Shannon [67]. Il s'agit de retrouver (exactement ou approximativement) en un point de la chaîne, le message issu d'un autre endroit de la même chaîne.

Pour améliorer, voire rendre parfaite, la restitution du message originel, nous pouvons faire appel à des solutions dites physiques [49, page 9], [28, page 213] : utiliser des composants plus fiables, augmenter la puissance émise ou refroidir les circuits pour réduire le bruit thermique. Autant de solutions qui entraînent des coûts supplémentaires. Une autre solution consiste à ajouter, dans la chaîne de communication, un ensemble codeur/décodeur, de manière à détecter voire corriger les erreurs. C'est à cette solution dite *codage de canal* (ou *codage correcteur d'erreur*) que nous nous intéressons maintenant. Le codage a pour vocation d'améliorer les performances grâce à un ajout de redondance. Sa réalisation est un ensemble codeur-décodeur. Le codeur transforme la séquence binaire en une séquence de mots (avec ajout de redondance) ; quant au décodeur, il permet de retrouver la séquence binaire originelle.

Il existe différents types de redondance. Ainsi, le codeur peut ajouter à la séquence binaire à transmettre d'autres éléments binaires (dits de redondance) selon une loi donnée. Dans ce cas, le codage est dit *binnaire* et le coût de l'ajout de redondance est la diminution du débit utile. Une autre manière d'ajouter de la redondance est d'augmenter la taille de la modulation. Il s'agit de *modulations codées*, où le coût est alors la diminution de la résistance au bruit mais où le débit utile reste constant.

Le choix du code (binaire ou modulations codées) et son optimisation dépend en fait du canal de transmission *i.e.* non seulement de la nature de l'évanouissement mais aussi de la connaissance (plus ou moins complète) de ces perturbations dues au canal au niveau du récepteur et/ou de l'émetteur [14]. Ainsi, dans [69], Ungerboeck montre que la stratégie optimale, pour le canal gaussien sans mémoire, est la modulation codée, où le code est optimisé relativement

à la modulation choisie.

Dans la suite, nous considérons un canal sélectif en fréquence et à bruit additif gaussien, dont la réponse impulsionnelle n'est connue que du récepteur. Aussi, le code sera optimisé en fonction de la seule perturbation connue au niveau de l'émetteur à savoir le bruit gaussien. La stratégie optimale est alors la modulation codée. Néanmoins, nous décidons d'utiliser l'émetteur où code et modulation sont séparés par un entrelaceur, car c'est un émetteur couramment utilisé dans les normes HF. Un tel émetteur est considéré comme un standard industriel de fait. C'est pourquoi nous nous intéressons maintenant au codage binaire optimisé pour un canal gaussien. Notons que Biglieri analyse cette structure [14] et montre que la perte est négligeable par rapport à la solution optimale (modulation codée) pour le canal gaussien sans mémoire. En revanche, le gain est considérable pour un canal de type Rayleigh.

En considérant des codes construits de manière aléatoire, Shannon montre dans [67] qu'une transmission fiable (*i.e.* avec une probabilité d'erreur arbitrairement faible) sur un canal bruyant existe tant que son débit binaire ne dépasse pas une limite propre au canal appelée sa *capacité*. Si l'existence d'un tel code permettant d'atteindre la capacité est prouvée, il reste à le trouver. Pour des questions de simplicité de mise en œuvre, les codes proposés et étudiés aujourd'hui résultent d'une règle de construction explicite. Cependant, parce qu'ils ne sont pas aléatoires, ils ont des propriétés asymptotiques moins performantes et n'atteignent pas la capacité de Shannon. Ils sont néanmoins très souvent utilisés dans des normes (GSM par exemple). Notons que la très récente découverte des Turbo-codes, a relancé tous ces débats en proposant un code non plus seulement optimisé selon des critères algébriques (et relevant ainsi de la classe des codes construits de manière explicite) mais aussi imitant le codage aléatoire en combinant efficacement une concaténation de codes et un entrelaceur [5, page 197].

Dans la suite de nos travaux, nous nous intéresserons davantage à ces Turbo codes, méthodes fort novatrices de [10], lorsque nous considérerons le Turbo-égaliseur (cf. Chapitres 3 & 4) puis le récepteur Turbo-CDMA (cf. Chapitre 5).

Dans cette section cependant, nous nous intéressons aux codes binaires plus classiques. Nous pouvons y distinguer deux grands groupes : les *codes en blocs* et les *codes convolutifs* (convolutionnels, séquentiels ou récurrents). De nombreux ouvrages de références proposent d'excellentes présentations du codage. Citons par exemple [28]. Quant à nous, nous présentons ici des résultats, qui nous permettront de choisir parmi ces deux grandes classes de code.

1.2 Codes en bloc linéaires

1.2.1 Structure d'un code bloc

L'opération de codage est ici réalisée par l'association d'un bloc de k bits d'information avec un mot de code composé de n bits codés, où $n > k$ pour satisfaire à la condition de redondance. Le code en bloc peut donc être représenté par :

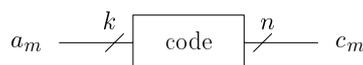


FIG. 1.1 – *Codeur*

Le *rendement* d'un tel code binaire est défini par le rapport,

$$R = \frac{k}{n}.$$

Les mots du code sont de taille n et sont au nombre de 2^k . Ils représentent donc un sous-ensemble \mathbf{C} de taille 2^k de l'ensemble de tous les n -uplets binaires possibles.

Le décodage d'un tel code consiste à trouver le mot de code le plus vraisemblable au message reçu \mathbf{r} . Nous nous intéressons dans cette thèse aux récepteurs appliqués aux transmissions radiomobiles et dans ce cas, un modèle possible est celui du canal sans mémoire à bruit additif gaussien. Avec l'hypothèse d'un tel canal, le mot de code le plus vraisemblable est le mot de code $\hat{\mathbf{c}}$ le plus proche du mot reçu \mathbf{r} au sens de la distance euclidienne :

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\{\mathbf{c} \in \mathbf{C}\}} d_E(\mathbf{r}, \mathbf{c}). \quad (1.1)$$

Rappelons que si le canal est binaire sans mémoire symétrique, la règle de décodage dépend alors de la distance de Hamming [28, page 223] :

$$\hat{\mathbf{c}} = \arg \min_{\{\mathbf{c} \in \mathbf{C}\}} d_H(\mathbf{r}, \mathbf{c}). \quad (1.2)$$

Cependant, le cas du canal binaire symétrique est très particulier et nous préférons le cadre d'un canal gaussien sans mémoire, qui s'applique au cas des transmissions radiomobiles.

1.2.2 Critère d'optimisation d'un code bloc

D'après la règle de décodage (1.1), la distance euclidienne entre les mots du code s'avère être un paramètre pertinent pour mesurer l'aptitude d'un code à protéger des erreurs. Ainsi, la *distance minimale* entre les mots du code devient un moyen d'évaluer les performances d'un code :

$$d_{min} = \min_{\{\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbf{C}, \mathbf{c} \neq \mathbf{c}'\}} d_E(\mathbf{c}, \mathbf{c}').$$

Dès lors, pour optimiser un tel code en bloc, il suffit de *maximiser cette distance minimale* d_{min} .

Notons que cette distance minimale vérifie :

$$d_{min} \leq n - k. \quad (1.3)$$

1.3 Codes convolutifs

1.3.1 Structure d'un code convolutif

Comme pour les codes en bloc, les codes convolutifs sont régis par une relation entrée/sortie qui associe (à chaque coup d'horloge) k bits d'information à n bits codés formant ainsi un mot de code. En revanche, cette relation utilise un effet de mémoire car le codeur est composé d'un registre à décalage de K blocs, où chaque bloc contient k bits. A chaque coup d'horloge, $K - 1$ blocs sont décalés et un bloc de k nouveaux bits d'information alimente le registre. K est appelée *la longueur de contrainte* et $K - 1$ la mémoire du code.

Il existe différents types de codes convolutifs. Le code est *systematique* lorsque les k bits sont copiés parmi les n bits codés et *non systematique* sinon. La Figure 1.2 présente l'exemple

d'un tel code systématique avec $k = 1$, $n = 2$ et $K = 7$. Chaque boîte représente une mémoire de 1 bit, où D est une variable correspondant à l'opérateur retard. D équivaut à z^{-1} dans la transformée en z [28, page 243] tel que : $D^n a_m = a_{m-n}$. Puis, les bits codés sont obtenus par addition modulo 2 des bits d'information. Ces additions sont définies par des polynômes fonction de D et appelés *polynômes générateurs du code*. En général, ces polynômes sont définis en octal. Ainsi, dans notre exemple les polynômes valent :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= [1000000] = 100_{(\text{octal})} \rightarrow c_{2m+1} = G_1(D)a_m = a_m \\ \mathbf{g}_2 &= [1111001] = 171_{(\text{octal})} \rightarrow c_{2m} = G_2(D)a_m = (1 + D + D^2 + D^3 + D^6)a_m \end{aligned}$$

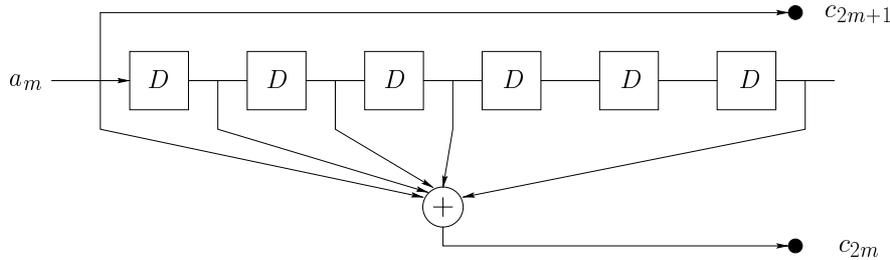


FIG. 1.2 – Codeur systématique non récursif ($k = 1, n = 2, K = 7$).

1.3.2 Critère d'optimisation d'un code convolutif

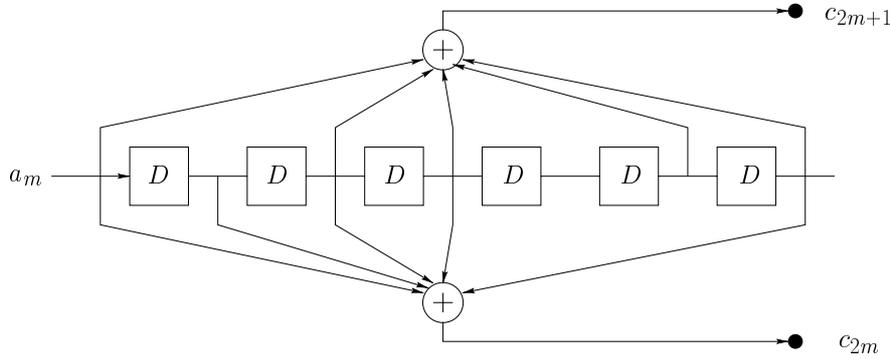
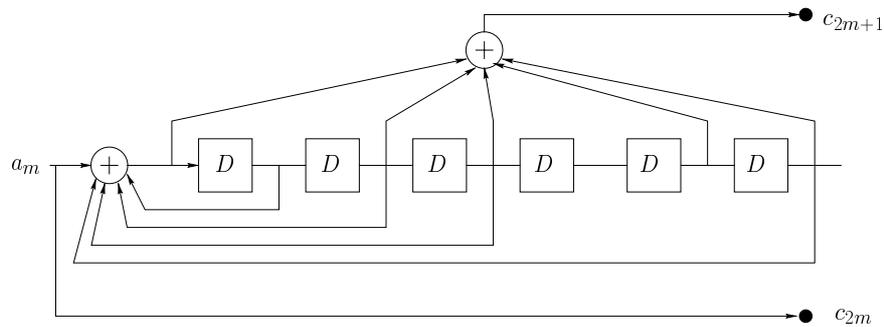
Comme dans le cas des codes en bloc et pour un canal gaussien sans mémoire, les performances à fort rapport signal à bruit des codes convolutifs sont déterminées par une distance minimale, qui est appelée distance libre d_{free} (pour *free distance*) de manière à la distinguer de la distance minimale définie plus haut et relative aux codes en bloc.

La distance libre d'un code convolutif est la plus petite distance de Hamming qui existe entre deux chemins qui divergent et convergent vers le même état. De plus, les codes convolutifs étant linéaires, cette distance libre est aussi égale au poids minimal des chemins qui divergent depuis un même état et convergent vers le même état [28, page 253]. Aussi, les codes convolutifs sont construits de manière à maximiser cette distance libre.

Ainsi, pour obtenir de meilleures performances, il faut augmenter sa distance libre. Une première approche consiste à augmenter la longueur de contrainte ce qui s'accompagne d'un accroissement de la complexité du décodage. Une autre méthode consiste à considérer des codes non-systématiques. En effet, un résultat classique est que les codes non-systématiques (et non-récursifs) ont de meilleures performances à fort rapport signal à bruit que les codes systématiques (et non-récursifs), puisque leur longueur de contrainte est plus grande [74, page 251]. L'un des codes convolutifs non-systématiques de longueur de contrainte $K = 7$, de rendement $R = 1/2$ et maximisant cette distance, qui vaut alors $d_{free} = 10$ est représenté à la Figure 1.3 et défini [56, page 493]. Ce code a pour polynômes générateurs

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= [1011011] = 133_{(\text{octal})} \rightarrow c_{2m+1} = G_1(D)a_m = (1 + D^2 + D^3 + D^5 + D^6)a_m \\ \mathbf{g}_2 &= [1111001] = 171_{(\text{octal})} \rightarrow c_{2m} = G_2(D)a_m = (1 + D + D^2 + D^3 + D^6)a_m \end{aligned}$$

En revanche, les codes non-systématiques présentent de moins bonnes performances que leurs concurrents systématiques à faible rapport signal à bruit.

FIG. 1.3 – Codeur non systématique non récursif ($k = 1, n = 2, K = 7$).FIG. 1.4 – Codeur systématique récursif ($k = 1, n = 2, K = 7$).

Berrou & Glavieux proposent dans [12] une alternative intéressante entre les deux précédents codes : le code *récursif systématique*. En effet, dans le code (Figure 1.3), il n'y a pas de retour de la sortie des registres vers l'entrée du codeur. Ce type de code est appelé *non-récursif*. A partir de ce code, il est possible de construire une version récursive en divisant chacun des polynômes par $G_2(D)$ par exemple (cf. Figure 1.4). Ceci ne change pas les propriétés algébriques du code. Ainsi la distance libre reste inchangée et vaut toujours 10. Mais comme nous l'avons rappelé en introduction (cf. paragraphe 1.1), les seules propriétés algébriques ne suffisent pas à déterminer un bon code et cette structure récursive permet d'obtenir de meilleures performances à faible rapport signal à bruit (RSB) comme le montre la Figure 1.5, tout en maintenant les mêmes performances à fort RSB.

Notons de plus, que pour un code convolutif on peut avoir :

$$d_{free} \geq n,$$

alors que la distance minimale d'un code en bloc est bornée par $n - k$ (cf. Equation 1.3).

1.4 Choix d'une classe de codes

Nous souhaitons présenter dans cette partie les principales raisons qui nous ont permis de choisir entre les codes bloc et les codes convolutifs. Ces raisons reposent essentiellement sur la facilité à réaliser un décodage pondéré.

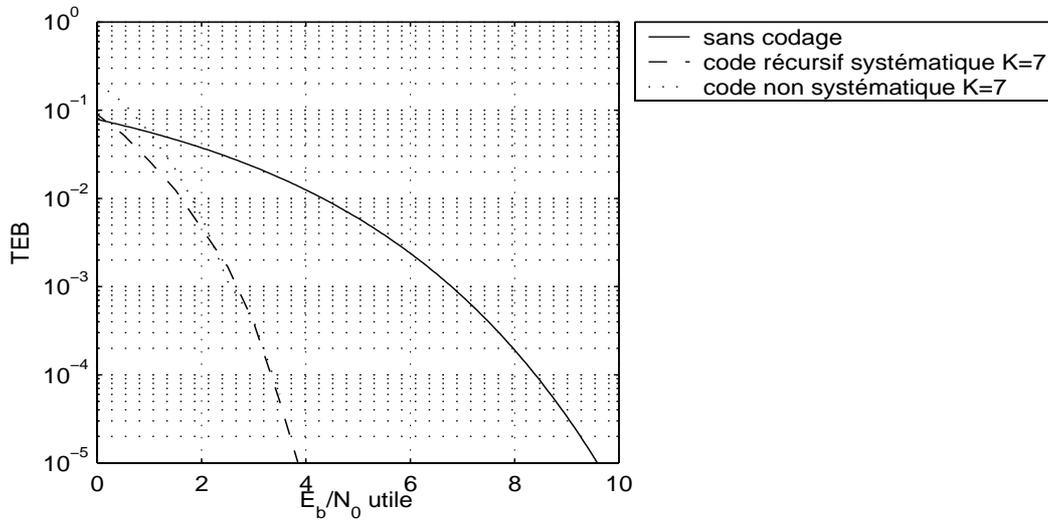


FIG. 1.5 – Performances des codes récursif systématique et non-systématique de mêmes caractéristiques : $k = 1, n = 2, K = 7$.

1.4.1 Définition du $\frac{E_b}{N_0}$ utile

Les performances de tout récepteur sont évaluées en fonction des caractéristiques du canal de transmission : à savoir sa largeur de bande mais aussi le rapport signal à bruit de la transmission.

Considérons un signal émis dans une bande de fréquence B après mise en forme (demi-Nyquist) avec une puissance S . Le canal de transmission ajoute un bruit gaussien complexe de densité spectrale N_0 (cf. Figure 1.6).

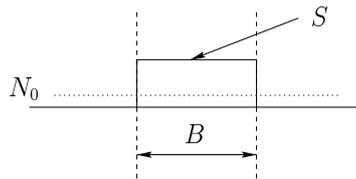


FIG. 1.6 – Spectre du signal utile et du bruit.

Le rapport signal à bruit (RSB) dans la bande utile est

$$RSB = \frac{S}{N_0 B}.$$

Soit $E_{b, \text{ transmis}}$ l'énergie par bit transmis *i.e.*

$$E_{b, \text{ transmis}} = S \frac{1}{D} = ST_{\text{bit transmis}}, \quad (1.4)$$

où D est le débit de bits transmis. Dès lors, nous pouvons écrire le rapport $\frac{E_{b, \text{ transmis}}}{N_0}$ en fonction du RSB, du débit transmis D et de la bande de fréquence utilisée B :

$$\frac{E_{b, \text{ transmis}}}{N_0} = \frac{S}{\underbrace{N_0 B}_{RSB}} \frac{B}{D} = \frac{S}{N_0 D}.$$

Afin de comparer les codes entre eux, il est important de définir une énergie par bit utile *i.e.* par bit d'information :

$$E_{b, \text{ utile}} = ST_{\text{bit utile}} = S \frac{T_{\text{bit transmis}}}{R} = \frac{E_{b, \text{ transmis}}}{R}. \quad (1.5)$$

Pour simplifier les notations, comme les bits transmis correspondent aux bits codés, nous notons $E_c = E_{b, \text{ transmis}}$. Quant à l'énergie par bit utile $E_{b, \text{ utile}}$, nous la notons E_b . Aussi, nous obtenons le résultat classique [56, page 436] :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{R} \frac{E_c}{N_0}. \quad (1.6)$$

Aussi, en représentant les performances d'un code en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ qui ne dépend pas du rendement du code, il est alors possible de comparer des codes avec des rendements différents.

1.4.2 Critères de comparaison et choix

Dans la Turbo-égalisation [43], sujet de cette thèse, le décodeur ne fournit pas seulement une estimation des bits d'information mais aussi une information pondérée relative aux bits « re- » codés du fait de la structure itérative. En effet, le gain est substantiel lorsque le décodage a lieu à entrée pondérée et non entrée décidée [28, page 257]. Il en est de même pour l'égaliseur des itérations $p > 1$, qui gagne à être alimenté par des sorties pondérées du décodeur.

L'algorithme de décodage de Bahl *et al.* [3] fournit une information pondérée fiable de chaque symbole sous la forme d'une probabilité *a posteriori* :

$$P(a_m = 1|\mathbf{r}) \text{ et } P(a_m = 0|\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

où a_m est le bit utile qu'on cherche à estimer et \mathbf{r} la séquence bruitée reçue. Pour tout code pouvant être mis sous forme de treillis, cet algorithme également appelé algorithme de décodage selon le *maximum a posteriori* (MAP) fournit les probabilités 1.7. Notons que les codes convolutifs [25] comme les codes en blocs linéaires [79] peuvent être écrits selon une structure treillis. Ainsi, tant que les codes convolutifs étaient les seuls codes à pouvoir être mis sous forme de treillis, ils étaient supérieurs aux codes en blocs car ils étaient les seuls codes à pouvoir être décodés de manière optimale par l'algorithme de Viterbi, ce qui n'est plus vrai depuis 1978. Aussi, les raisons qui nous ont amenées à préférer les codes convolutifs sont plus historiques que objectives. L'algorithme MAP a été originellement proposé pour les codes convolutifs [3] et d'autre part les codes en blocs linéaires présentent la difficulté supplémentaire d'avoir un treillis qui varie au cours du temps. D'autre part, nous avons repris la démarche des chercheurs de l'ENST Bretagne. Les Turbo-codes ont d'abord été inventés avec des codes convolutifs [10] et seulement ensuite avec des codes en blocs [57]. De plus, nous partions des travaux de C. Laot, qui considérait des codes convolutifs.

Nous considérons donc ici les codes convolutifs. De plus, fort des résultats précédents sur les codes convolutifs (cf. paragraphe 1.3.2), nous avons choisi le plus performant (à complexité égale *i.e.* à longueur de contrainte égale et à même nombre de bits d'information k) à savoir un code récursif systématique. Cependant, les analyses et algorithmes que nous avons considérés se transposent aisément au cas de codes en blocs. Dans ce travail, nous n'avons pas cherché à optimiser le choix du codeur.

1.5 Performances asymptotiques des codes convolutifs

Dans cette partie, nous rappelons les grandes lignes de la démonstration très classique du calcul des performances d'un code convolutif à entrée pondérée [56, page 486]. Nous considérons ici le cas d'une modulation de phase binaire (ou BPSK, *Binary Phase Shift Keying*) où la démodulation est cohérente. Ce résultat sera utilisé dans la section 4.2 pour calculer des bornes de récepteur d'égalisation et de décodage conjoints.

1.5.1 Performances sur le canal additif blanc gaussien non codé

Nous rappelons tout d'abord que, dans le cas d'une modulation binaire transmise sans codage sur un canal à bruit additif blanc gaussien (BABG), [56, page 258] montre que la probabilité d'erreur est :

$$P_{b,BABG} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \quad (1.8)$$

avec

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

1.5.2 Fonction de transfert et performances d'un code convolutif

Avant d'évaluer les performances du code convolutif, il nous faut tout d'abord introduire la fonction de transfert du code $T(D, N)$. Nous ne souhaitons pas ici « re- » démontrer cette fonction mais plutôt en proposer une interprétation.

La fonction de transfert du code $T(D, N)$ décrit toutes les séquences possibles d'un code qui partent d'un état et reviennent au même. De ce fait, comme nous le montrons ci-dessous, ce polynôme permet d'obtenir une borne supérieure de la probabilité d'erreur en sortie du décodeur lorsque la probabilité d'erreur d'un symbole entrant est D .

Comme les codes convolutifs sont linéaires, sans perte de généralité, nous pouvons calculer cette probabilité d'erreur en considérant que la séquence transmise est la séquence tout-0. Dès lors toute séquence divergeant et convergeant vers l'état 0 est une séquence d'erreur. L'ensemble de ces séquences sont schématisées dans le diagramme d'état [56, page 477].

Chaque branche du diagramme représente la transition entre deux états et correspond à un mot codé de poids d (*i.e.* qui contient d bits erronés valant 1). Cette branche est alors indiquée par D^d . Finalement, un chemin est l'accumulation de ces branches et on lui associe la multiplication des contributions de chaque branche. Ceci car la probabilité d'erreur entre 2 séquences codées distantes de d peut être bornée par D^d avec $D = e^{-E_b R/N_0}$ [56, page 487], où E_b/N_0 est défini Section 1.4.1 et où R est le rendement du code.

En effet, d'après (1.8), la probabilité d'erreur résultant de la comparaison 2 à 2 de 2 séquences codées d'énergie binaire E_c et différant en d bits vaut :

$$P_2(d) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_c}{N_0}d}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}Rd}\right) \leq e^{-\frac{E_b}{N_0}Rd} = D^d \Big|_{D=e^{-\frac{E_b}{N_0}R}}.$$

$T(D, N)$ décrit toutes les séquences possibles du code divergeant et convergeant vers le même

état :

$$T(D, N) = \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d D^d N^{f(d)}$$

avec a_d le nombre de chemins de poids d et $f(d)$ le nombre de bits d'information erronés (*i.e.* valant 1).

Le calcul du polynôme se fait alors à partir du diagramme d'état du code, qui dénombre toutes les séquences possibles. La Figure 1.7 présente ce diagramme pour le code de rendement 1/3, de longueur de contrainte 3 et de polynômes (4,5,7).

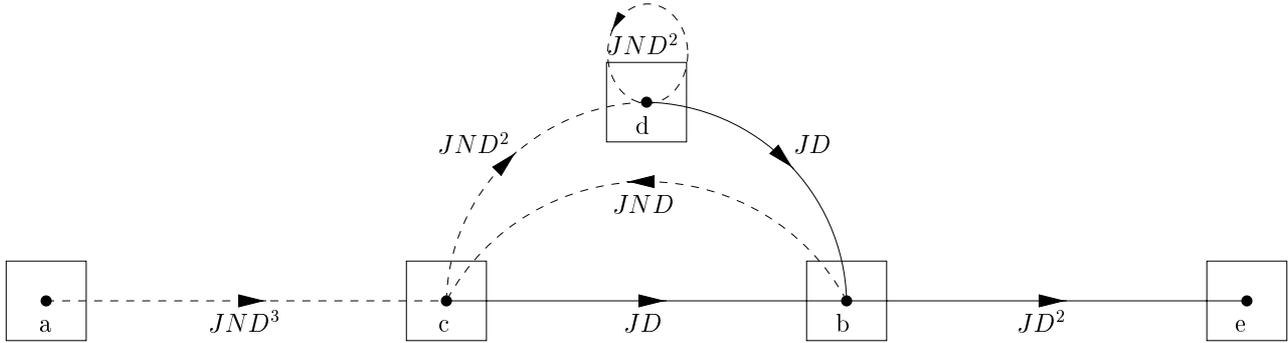


FIG. 1.7 – Diagramme du code

La probabilité d'erreur en sortie du décodeur est alors bornée :

$$P_{B\text{ABG codé}} < \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} R_c d} \right)$$

Il s'agit bien d'une borne car les différents événements dans $P_2(d)$ ne sont pas indépendants et la somme est réalisée avec $d \rightarrow \infty$ alors qu'en pratique les tailles de bloc sont tronquées. La probabilité d'erreur **binaire** en sortie du décodeur est bornée :

$$P_{b,B\text{ABG codé}} < \frac{1}{k} \sum_{d=d_{free}}^{\infty} a_d f(d) Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} R_c d} \right). \quad (1.9)$$

1.5.3 Gain de codage

Le gain de codage est défini comme le gain asymptotique (*i.e.* à fort rapport signal à bruit) qu'un code peut apporter par rapport à une transmission sans codage. Lorsque $\frac{E_b}{N_0}$ tend vers ∞ , la borne définie dans (1.9) est dominée par le premier terme :

$$Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} R_c d_{free}} \right).$$

Cette nouvelle borne est à comparer avec la probabilité d'erreur binaire d'une transmission non-codée (1.8). Le gain de codage est alors la distance en décibel entre les 2 courbes :

$$\text{gain de codage} = 10 \log_{10}(R_c d_{free}), \quad (1.10)$$

et on a, à fort RSB :

$$P_{b,B\text{ABG codé}} = P_{b,B\text{ABG}}(\text{RSB} + \text{gain de codage}).$$

1.6 Entrelacement

Un codeur est rarement utilisé seul. En effet, pour atteindre le gain de codage, il est important d'utiliser un entrelaceur.

Lorsque le canal subit des évanouissements de type Rayleigh, ou bien lorsque le décodeur est placé après un égaliseur, des paquets d'erreurs surviennent et il est important de disséminer les erreurs [56, page 468]. Ceci peut être réalisé par l'entrelacement.

De plus, nous avons considéré ici des codes optimisés pour des canaux de transmissions, où les échantillons de bruit qui affectent les données codées sont décorrélés [56, page 484]. Si le décodeur est placé après un égaliseur, cette hypothèse n'est pas vérifiée et le désentrelaceur placé en amont du décodeur assure une certaine décorrélation du bruit. La décorrélation serait parfaite si l'entrelaceur était de taille infinie et si la règle de lecture de l'entrelaceur était aléatoire, conditions qui pour des raisons d'implémentation ne peuvent être satisfaites. En effet, la taille de la mémoire nécessaire est alors trop importante et l'entrelaceur apporte un retard, qui ne peut être indéfiniment grand dans une application temps-réel.

Néanmoins, la décorrélation du bruit en entrée du décodeur n'est pas une condition d'optimisation du code mais plutôt une contrainte imposée au décodeur, ce qui limite les performances du code. En fait, il est possible d'intégrer dans le calcul de la distance une éventuelle corrélation du bruit, comme [68] le propose pour l'égaliseur de Viterbi.

1.7 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons présenté les codes dits algébriques, à savoir les codes en bloc et les codes convolutifs. Nous avons ensuite présenté les propriétés de ces codes de manière à pouvoir les distinguer et choisir ainsi dans la suite de cette thèse une famille de codes. Notre choix s'est porté sur les codes convolutifs, car les algorithmes de décodage à sortie pondérée sont plus aisés pour ces codes dont le treillis est fixe, alors que le treillis des codes bloc varie au cours du temps. Puis, parmi les codes convolutifs, nous avons choisi les codes récurrents systématiques, qui, à complexité égale, donnent les meilleures performances. Enfin, nous avons montré que le gain d'un codeur de type algébrique dépend directement de la présence d'un entrelaceur, celui-ci disséminant les erreurs qui arrivent par paquet à la sortie d'un égaliseur ou après un canal de Rayleigh.

Chapitre 2

De l'égalisation

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le codage de canal en tant que technique pouvant protéger voire corriger des erreurs dues aux perturbations apportées par le canal de transmission. Cependant, il existe un type de canal appelé sélectif en fréquence et qui apporte de l'interférence dite *interférence entre symboles*, que le décodeur ne peut pallier. Ces interférences très spécifiques sont compensées grâce aux techniques dites d'*égalisation*.

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de rappeler les caractéristiques d'un canal de transmission sélectif en fréquence. Pour fixer les idées, nous présenterons deux applications, où les causes engendrant la sélectivité sont différentes. Puis, nous proposerons un modèle discret de canal sélectif, qui nous permettra d'introduire la problématique de l'égalisation numérique. Nous attacherons une attention toute particulière à la définition de ce modèle, qui peut être équivalent à la transmission analogique et dans ce cas sans perte d'information (statistiques suffisantes), ou bien avec perte d'information.

Fort de ce modèle, nous pourrons alors présenter les grandes familles d'égaliseur. Nous proposons ici une classification des égaliseurs selon la présence ou non d'une contrainte sur leur structure, puis selon le critère d'optimisation choisie. Cette présentation nous semble importante, car elle nous permettra de comparer les égaliseurs utilisés dans les récepteurs Turbo aux égaliseurs plus classiques, que nous présentons ici.

Une dernière partie plus originale sera consacrée à une étude de cas. Nous analyserons différents canaux de transmission et proposerons une notion de difficulté à égaliser.

2.2 Le canal de transmission

Dans cette partie, nous souhaitons caractériser plus avant les perturbations que peut apporter le canal de transmission.

2.2.1 Modèle du canal

Soit une séquence de symboles utiles d_n issus d'un alphabet de taille finie et émise à la fréquence symbole $1/T_s$:

$$d(t) = \sum_n d_n \delta(t - nT_s) \quad (2.1)$$

Ce signal $d(t)$ est alors transmis selon la chaîne de la Figure 2.1. A l'émission, ce signal est filtré par un filtre dit de mise en forme ou d'émission, de réponse impulsionnelle $f_e(t)$ et de gain complexe $F_e(f)$, puis son spectre est décalé en fréquence autour d'une fréquence centrale f_0 .

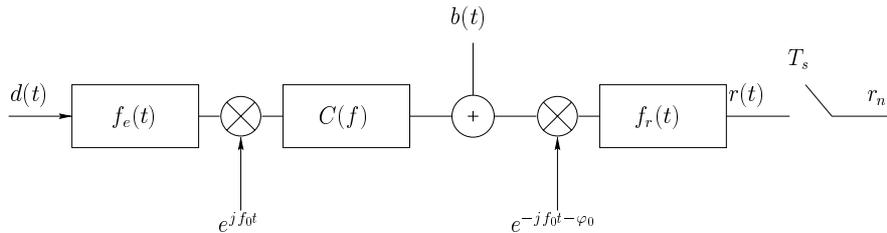


FIG. 2.1 – Chaîne de transmission numérique sur canal sélectif en fréquence.

Le canal de transmission supposé invariant dans le temps, est représenté par son gain complexe $C(f)$ et ajoute un bruit blanc gaussien $b(t)$. Au niveau du récepteur, le signal est replacé en bande de base puis filtré par un filtre de réponse impulsionnelle $f_r(t)$, filtre adapté au filtre d'émission en bande de base (pour réaliser le partage optimal entre émission et réception [28, page 61], qui maximise le rapport signal à bruit). Ensuite, le signal ainsi filtré est échantillonné au rythme symbole $1/T_s$ (ou à un rythme supérieur).

La relation qui lie le signal utile au signal reçu dans le domaine fréquentiel est :

$$R(f) = H(f)D(f) + W(f), \text{ avec } H(f) = F_e(f)C_{bb}(f)F_r(f) \quad (2.2)$$

où C_{bb} est le canal équivalent en bande de base et $W(f)$ le bruit en bande de base filtré par le filtre de réception. (2.2) s'écrit dans le domaine temporel :

$$r(t) = h \star d(t) + w(t) = \sum_j d_j h(t - jT_s) + w(t).$$

Après échantillonnage au rythme symbole et à l'instant optimal d'échantillonnage, on obtient :

$$r_n = \sum_j h_j d_{n-j} + w_n. \quad (2.3)$$

un modèle discret du canal de transmission. Notons que les échantillons w_n sont supposés décorrélés car issus (en général) d'un filtre demi-Nyquist en cosinus surélevé ($F_r(f)$).

Les canaux que nous considérons ici ont une atténuation non-constante dans la bande utile et/ou un déphasage non-linéaire. Ils appartiennent à la classe des *canaux sélectifs en fréquence*, que nous caractérisons plus avant dans la section suivante et leur réponse impulsionnelle contient plusieurs coefficients non nuls. Selon le modèle (2.3), un échantillon reçu contient la contribution du symbole d'intérêt sous la forme $h_0 d_n$ mais aussi la contribution d'autres symboles qui représente l'interférence entre symboles (IES).

Égaliser c'est donc retrouver le symbole d_n à partir des échantillons r_n *i.e.* s'affranchir des effets de l'interférence due au canal de transmission.

2.2.2 Canaux sélectifs en fréquence

Considérons une modulation numérique binaire dont le temps symbole est T_s . Pour conclure à la sélectivité en fréquence du canal, il faut comparer ce temps symbole à la donnée critique qui permet de caractériser un canal et qui s'appelle l'étalement temporel du canal T_m [56, page 763] (*delay time spread* ou *multipath spread* dans le cas d'un canal discret). Nous supposons dans la suite le canal invariant dans le temps.

Il existe différentes définitions pour cet étalement. Ainsi, si le canal est spéculaire, l'étalement temporel du canal T_m n'est autre que la longueur de la réponse impulsionnelle *i.e.* l'écart temporel entre l'instant d'arrivée du premier trajet et celui du dernier. Le canal est dit sélectif en fréquence si $T_m > T_s$.

En revanche, si le canal n'est pas spéculaire, la définition précédente ne peut être appliquée. Il existe alors une définition qui consiste à prendre l'écart type des retards en prenant comme densité de probabilité, l'énergie moyenne des trajets [72, page 48]. Dans ce cas, nous notons l'étalement temporel T_m^{RMS} , où RMS signifie *root mean square*. Ainsi, T_m^{RMS} donne l'intervalle temporel, où l'énergie du canal est non négligeable, ce qui permet de s'affranchir des faibles coefficients de la réponse impulsionnelle. Le canal est alors dit sélectif en fréquence si $T_s \leq T_m^{\text{RMS}}$. Si, $T_s \gg T_m^{\text{RMS}}$ (on prend en général $T_s \geq 10 T_m^{\text{RMS}}$ [46]), alors il ne l'est pas.

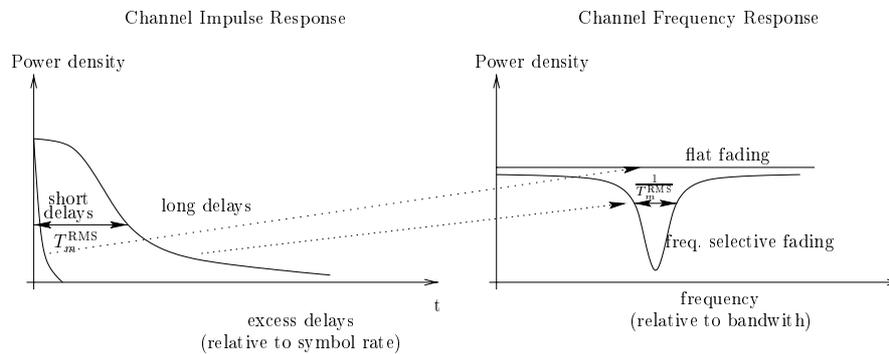


FIG. 2.2 – Caractérisation d'un canal sélectif en fréquence.

Pour l'interprétation fréquentielle du canal sélectif en fréquence, nous introduisons la notion de bande de cohérence qui est environ l'inverse de l'étalement temporel : $(\Delta f)_c \approx 1/T_m$. D'autre part, la modulation numérique linéaire est caractérisée par la bande du signal utile, dont l'ordre de grandeur est $1/T_s$ [56, pages 204-209]. Alors, si $1/T_s \geq (\Delta f)_c$, le canal est dit sélectif en fréquence. Si $1/T_s \ll (\Delta f)_c$, le canal est dit à évanouissement plat ou *flat fading*.

La Figure 2.2 présente ces notions d'étalement temporel et de bande de cohérence et montre un cas de canal sélectif en fréquence et un autre cas de canal à évanouissement plat.

Notons que la sélectivité en fréquence résulte de l'observation de la fonction de transfert du canal de transmission mais ne décrit pas la cause qui crée cette sélectivité. Nous présentons donc ci-dessous deux exemples différents de cas de sélectivité.

2.2.2.1 Transmission filaire

Dans le cas de transmission filaire, le support de transmission est par construction à bande limitée *i.e.* $(\Delta f)_c$ est bornée. Aussi, lorsqu'on cherche à transmettre à débit $1/T_s$ élevé (cas de

la norme ADSL par exemple), nous obtenons alors $(\Delta f)_c \ll 1/T_s$ et le canal est bien sélectif en fréquence.

Ainsi, la limitation résulte ici de la nature du support de transmission à bande limitée et du débit élevé envisagé.

2.2.2.2 Transmission sans fil

Dans le cas des transmissions sans fil et plus particulièrement hertziennes, le canal de transmission analogique est multitrajets par nature. Ainsi, pour des communications dans la bande HF (3-30 Mhz), le signal émis se réfléchit sur l'ionosphère. De part les irrégularités de cette couche ionosphérique, la réponse impulsionnelle contient en général 2 à 3 trajets espacés de 1 à 10 ms. Avec un débit binaire de 2400 Bd, le temps symbole vaut $T_s \simeq 0.4ms$ et avec $T_m = 1$ à $10ms$, le canal est bien sélectif en fréquence car $\frac{T_m}{T_s} \simeq 40$ à 400.

En revanche, pour les transmissions VUHF comme les communications radio-mobiles (900-1800 MHz), le signal transmis subit des réflexions (bâtiments, ...) multiples (cf. Figure 2.3). En milieu urbain par exemple, la réponse impulsionnelle s'étale sur 5 à 6 temps symbole T_s et le canal est bien sélectif en fréquence.

Aussi, la limitation ne réside pas dans la bande mais dans la présence intrinsèque de multitrajets (*i.e.* $T_m \gg T_s$). Aussi, lorsqu'on cherche à transmettre à haut débit, on a $T_m \gg T_s$ et le canal est bien sélectif en fréquence.

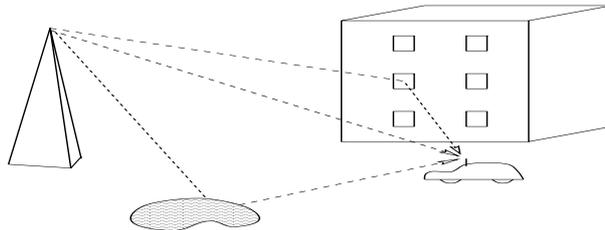


FIG. 2.3 – Transmission sans fil et réflexions causant des multitrajets.

2.2.3 Modèle discret équivalent du canal et statistiques suffisantes

Fort du modèle discret défini en (2.3), une question légitime se pose désormais : l'ensemble des échantillons $\{r_n\}$ contient-il toute l'information du signal $r(t)$ utile à la détection des symboles d_n ? Dans l'affirmative, l'ensemble $\{r_n\}$ constitue un *résumé exhaustif* [75, page 8] (ou des *statistiques suffisantes* [74, page 55]) de l'information contenue dans $r(t)$.

Cette notion de statistiques suffisantes est donc fondamentale car elle assure que l'échantillonnage n'occasionne aucune perte d'information. Il nous paraît donc important de préciser plus avant cette notion.

Notons que cette notion dépend directement de l'instant et du rythme d'échantillonnage, mais aussi du traitement utilisé au cours de la réception après échantillonnage.

Ainsi, Forney montre dans [24] que, pour le récepteur de Viterbi, optimal au sens du maximum de vraisemblance par séquence, les échantillons de sortie du filtre adapté au canal et à l'émission, blanchi¹ et au rythme symbole $1/T_s$ constituent des statistiques suffisantes. Puis, en 1974,

1. Le blanchiment est réalisé à l'aide du filtre résultant de la factorisation forte de l'autocorrélation associée

Ungerboeck [68] montre que la sortie du filtre adapté (*i.e.* adapté à $f_e(t)$ et au canal en bande de base $c_{bb}(t)$) au même rythme symbole $1/T_s$ suffit pour ce même récepteur.

Dans le cas de l'égaliseur DFE (*decision feedback equalizer*), Belfiore & Park montrent dans [8], que le filtre avant optimal (avant échantillonnage) est le filtre adapté blanchi² suivi d'un échantillonnage au temps symbole T_s , si le critère utilisé est *Zero Forcing* et si le nombre de coefficients du filtre retour tend vers l'infini. Ce filtre adapté blanchi fournit donc aussi des statistiques suffisantes.

Il est alors possible de se donner un modèle de canal discret équivalent, proche de (2.3):

$$r_n = \sum_j f_j d_{n-j} + w_n. \quad (2.4)$$

mais où f contient les filtres d'émission et de réception, le canal de propagation et son filtre adapté (*i.e.* l'autocorrélation du canal) et éventuellement le blanchiment du bruit.

Notons que le traitement par filtre adapté au canal de transmission n'est en général pas effectué car il nécessite la connaissance analogique de ce canal. En revanche, un traitement équivalent (*i.e.* sans perte d'information) peut être effectué numériquement mais à un rythme d'échantillonnage plus élevé [44, page 482]. Ces égaliseurs sont dits fractionnés. Dans cette thèse, nous nous placerons plutôt dans le cas où aucune de ces opérations n'est effectuée : pas de filtre analogique adapté (éventuellement blanchi) et échantillonnage au rythme symbole. Nous considérerons donc le modèle (2.3). Ainsi, nous nous donnerons des réponses impulsionnelles h_j , qui ne correspondent pas à des filtres adaptés ni à des filtres adaptés blanchis.

De plus, nous supposons les processus aléatoires d_n et w_n centrés, stationnaires fortement, identiquement distribués et blancs, de puissances respectives σ_d^2 et σ_w^2 . Le bruit w_n est supposé de loi gaussienne et indépendant de d_n . Notons que ce modèle n'est pas toujours à statistiques suffisantes (sauf si le canal analogique en bande de base a des trajets espacés exactement d'un temps symbole) et qu'alors nous ne serons pas en mesure de quantifier la perte d'information.

Nous nous donnons dans la suite le modèle discret du canal :

$$r_n = \sum_{j=0}^L h_j d_{n-j} + w_n \Leftrightarrow R(z) = H(z)D(z) + W(z). \quad (2.5)$$

où h définit une réponse impulsionnelle de taille L et w un bruit blanc gaussien.

Pour la suite, nous introduisons ici la factorisation forte de l'autocorrélation du canal $H(z)$ en fonction du filtre causal stable $h_+(z)$ d'inverse causal stable.

$$\Gamma_h(z) = H(z)H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) = H_+(z)H_+^* \left(\frac{1}{z^*} \right). \quad (2.6)$$

$H_+(z)$ est un filtre causal à minimum de phase.

2.3 Présentation des égaliseurs

Considérons le modèle discret d'un canal de transmission (2.5). Ce modèle fournit une relation entrée/sortie entre les symboles émis d_n et les échantillons reçus r_n . L'égalisation est l'opération

à $F_e(f)C_{bb}(f)$.

2. Le même traitement que [24].

qui consiste à retrouver la séquence d_n à partir de la séquence r_n . Pour ce faire, un égaliseur optimise un critère donné.

Parmi les égaliseurs classiques existants, nous pouvons distinguer deux familles d'égaliseurs. Les premiers optimisent un critère sans aucune contrainte relative à la structure (cf. Section 2.3.1). En revanche, les seconds s'imposent une structure (cf. Section 2.3.2) souvent à base de filtres. Dans tous les cas, nous supposons disposer d'une séquence d'apprentissage suffisamment longue pour estimer la réponse impulsionnelle du canal $\{h_j\}$ de taille finie. Dans ce qui suit, nous supposons le canal connu.

2.3.1 Égaliseur à structure non-imposée

Lorsqu'aucune contrainte structurelle n'est imposée à l'égaliseur, il est alors possible de résoudre le problème de l'égalisation au sens du *Maximum a posteriori* (MAP) *i.e.* trouver un estimateur des symboles émis connaissant les échantillons reçus. Il est alors possible de distinguer deux critères MAP. Lorsque ce critère est défini par séquence, il conduit à l'algorithme de Viterbi [24, 25]. En revanche, s'il est par symbole, l'algorithme obtenu est l'algorithme dit de Bahl *et al.* ou aller-retour (pour *Forward-Backward*) [3, 76].

2.3.1.1 Maximum a posteriori par séquence

Nous présentons ici le célèbre algorithme de Viterbi qui minimise la probabilité d'avoir une erreur dans la séquence décidée [24] et que nous appelons la probabilité d'erreur séquence.

L'étape préalable à l'algorithme de Viterbi proprement dit est le filtrage des échantillons reçus. Considérons le modèle discret du canal 2.5, où le filtrage adapté blanchi analogique n'a pas été réalisé (cf. Section 2.2.3). [44, page 481] propose de remplacer le filtre analogique optimal par le filtre numérique après échantillonnage au temps symbole :

$$F(z) = H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \frac{1}{H_+^* \left(\frac{1}{z^*} \right)}.$$

Notons que ce filtre est, à un facteur de normalisation près h_{+0} , le filtre avant de l'égaliseur DFE avec critère forçage à zéro présenté Section 2.3.2.2.1. Il contient le filtrage adapté au canal avec $H^* \left(\frac{1}{z^*} \right)$ mais aussi le blanchiment du bruit avec $\frac{1}{H_+^* \left(\frac{1}{z^*} \right)}$, où H_+ est la factorisation forte de l'autocorrélation du canal $H(z)$:

$$H(z)H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) = H_+(z)H_+^* \left(\frac{1}{z^*} \right).$$

A la sortie de ce filtre, nous obtenons :

$$z_n = \sum_{j=0}^L h_{+j}d_{n-j} + b_n \Leftrightarrow R(z) = H_+(z)D(z) + B(z), \quad (2.7)$$

où b_n est un bruit gaussien (car issu du filtrage de w_n lui-même gaussien) et blanc grâce au blanchiment. Notons que le blanchiment n'est en général pas utile car l'algorithme de Viterbi peut intégrer une corrélation du bruit, comme le montre [68]. En revanche, si l'on souhaite réduire le nombre d'états du treillis comme dans [21] en traitant les derniers trajets de la réponse impulsionnelle par un DFE, il est alors indispensable de concentrer l'énergie en début de

réponse impulsionnelle, ce qui est réalisé à l'aide du blanchiment, grâce auquel la concaténation du canal et du filtre avant devient $H_+(z)$ un filtre à phase minimale.

En fait, l'algorithme de Viterbi, comme nous le présentons ci-dessous, utilise la diversité apportée par les différents trajets de la réponse impulsionnelle. Aussi, l'opération de filtrage préalable n'est pas nécessaire sauf si nous envisageons de réduire la taille du treillis [21]. C'est pourquoi dans la suite nous prenons le modèle non filtré (2.5) plutôt que (2.7). Notons néanmoins qu'un simple changement de variable permet d'utiliser le modèle (2.7), avec r_n , h_j et w_n qui deviennent alors respectivement z_n , h_{+j} et b_n .

2.3.1.1.1 Décomposition du critère

Relativement au canal (2.5), nous définissons σ_n un état à l'instant n . Cet état est l'ensemble des symboles « passé », utiles au calcul de l'échantillon r_n soit $(d_{n-1} \cdots d_{n-L})$. La transition ξ_n en revanche, contient tous les symboles utiles au calcul de r_n , soit $(d_n \cdots d_{n-L})$. Ainsi la transition n'est autre que la concaténation de l'état σ_n et du symbole courant d_n . Nous supposons de plus, que nous disposons d'une séquence d'échantillons reçus de taille $N + 1$ $\mathbf{r} = (r_0 \cdots r_N)$, qui correspond à l'émission de la séquence de symboles $\mathbf{d} = (d_0 \cdots d_{N-L-1})$ dont les états de départ et d'arrivée sont connus du récepteur et fixés arbitrairement à l'état « tout -1 ». Ces définitions sont résumées dans le Tableau 2.1.

$\sigma_n = (d_{n-1} \cdots d_{n-L})$ $\xi_n = (d_n \cdots d_{n-L})$	un état une transition
$\mathbf{d} = (\cdots - 1, d_0 \cdots d_{N-L-1}, -1 \cdots)$ $\mathbf{r} = (r_0 \cdots r_N)$	séquence émise séquence reçue

TAB. 2.1 – Définition des états et transitions pour un canal sélectif en fréquence.

Egaliser au sens du MAP par séquence revient à chercher la séquence :

$$\hat{\mathbf{d}} = \arg \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} P(\mathbf{d}|\mathbf{r}), \quad (2.8)$$

où \mathcal{D} est l'alphabet des symboles d_n . En appliquant la règle de Bayes et parce que $P(\mathbf{r})$ est indépendant de \mathbf{d} , on obtient :

$$\hat{\mathbf{d}} = \arg \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} P(\mathbf{r}, \mathbf{d}) = \arg \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} P(\mathbf{r}|\mathbf{d}) P(\mathbf{d}).$$

Ainsi, chercher la séquence optimale au sens du MAP est équivalent à chercher la séquence qui maximise la probabilité jointe. Comme le bruit de la transmission w_n est blanc :

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{d}) = \prod_{n=0}^N P(r_n|\mathbf{d})$$

Puisque la dépendance de r_n est limitée à $(d_n \cdots d_{n-L}) = (\sigma_{n+1}, \sigma_n)$ d'après le modèle (2.5), nous obtenons :

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{d}) = \prod_{n=0}^N P(r_n|\sigma_{n+1}, \sigma_n).$$

De plus, les états forment un processus Markovien (par définition) et

$$P(\mathbf{d}) = \prod_{n=0}^N P(\sigma_{n+1}|\sigma_n).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} P(\mathbf{r}, \mathbf{d}) &= \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} \prod_{n=0}^N P(r_n | \sigma_{n+1}, \sigma_n) \prod_{n=0}^N P(\sigma_{n+1} | \sigma_n) \\ &= \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} -\ln P(\mathbf{r}, \mathbf{d}) = \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} \sum_{n=0}^N \lambda(\xi_n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\text{où } \lambda(\xi_n) = \underbrace{-\ln P(\sigma_{n+1} | \sigma_n)}_A - \ln P \left(r_n \mid \underbrace{\xi_n}_{\sigma_{n+1}, \sigma_n} \right) \quad (2.10)$$

Ainsi, le critère MAP séquence est équivalent à la minimisation d'une somme de métriques élémentaires $\lambda(\xi_n)$ (2.9), qui se décomposent elle-mêmes en deux termes (2.10). Le premier terme A contient une information *a priori* sur la source. En revanche, B caractérise la vraisemblance du symbole reçu r_n . Notons que lorsque les symboles émis sont équiprobables, A est constant et peut donc être retiré de la minimisation. Puis, l'algorithme de Viterbi maximise alors la vraisemblance de la séquence reçue, ce qui a conduit à nommer l'algorithme de Viterbi comme l'estimateur séquence au sens du Maximum de vraisemblance [56, page 584] et [24].

Notons également, que dans ce cas, il n'est pas nécessaire de calculer toute la vraisemblance :

$$-\ln P \left(r_n \mid \underbrace{\xi_n}_{\sigma_{n+1}, \sigma_n} \right) = \sum_{n=0}^N \left(\ln(\pi \sigma_w^2) + \frac{\|r_n - \sum h_j d_{n-j}\|^2}{\sigma_w^2} \right)$$

où nous considérons un bruit complexe de variance σ_w^2 . En effet,

$$\begin{aligned} \arg \max_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} -\ln P \left(r_n \mid \underbrace{\xi_n}_{\sigma_{n+1}, \sigma_n} \right) &= \arg \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} \sum_{n=0}^N \|r_n - \sum h_j d_{n-j}\|^2, \\ &= \arg \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} \sum_{n=0}^N \left(\|\sum h_j d_{n-j}\|^2 - 2\Re(r_n^* (\sum h_j d_{n-j})) \right). \end{aligned}$$

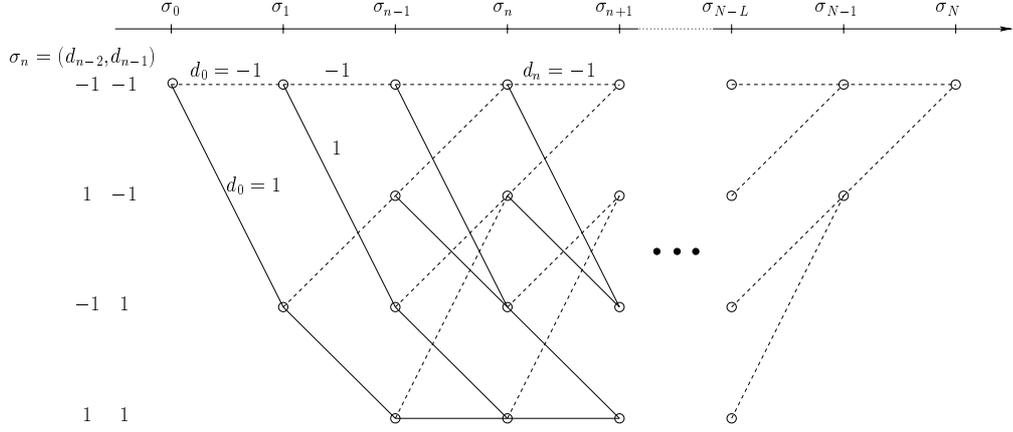
Ainsi, la suppression de la constante A et la simplification de la vraisemblance fournit la minimisation :

$$\arg \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} \sum_{n=0}^N \lambda(\xi_n) = \arg \min_{\mathbf{d} \in \mathcal{D}^{N-L}} \sum_{n=0}^N \left(\|\sum h_j d_{n-j}\|^2 - 2\Re(r_n^* (\sum h_j d_{n-j})) \right).$$

Cette dernière expression permet de réduire significativement le nombre d'opérations. En effet, pour chacune des transitions ξ_n nous pouvons calculer préalablement $\|\sum h_j d_{n-j}\|^2$ et $(\sum h_j d_{n-j})$. Alors, il suffit d'une multiplication et d'une addition pour obtenir une métrique $\lambda(\xi_n)$. De plus, nous évitons l'estimation de la puissance du bruit σ_w^2 [45].

2.3.1.1.2 Algorithme de Viterbi

La complexité du traitement qui minimise la métrique (2.9) réside en le très grande nombre de séquence à considérer soit $\text{card}(\mathcal{D})^{N-L}$, où $\text{card}(\mathcal{D})$ est la taille de l'alphabet \mathcal{D} des symboles d_n . L'algorithme de Viterbi consiste à réduire de manière astucieuse cette complexité de $\text{card}(\mathcal{D})^{N-L}$ à $\text{card}(\mathcal{D})^L$, en calculant de manière récursive le critère (2.9), que nous cherchons à minimiser.

FIG. 2.4 – Treillis pour un canal de longueur $L = 2$ et pour une modulation binaire.

Le canal (2.5) est représenté sous forme de treillis grâce aux états et transitions définies dans le Tableau 2.1.

Soit un état particulier à l'instant n et noté σ_n . Il existe un grand nombre de chemins dans le treillis qui mènent à cet état. Parmi ces chemins, nous définissons *le survivant* comme celui de métrique cumulée minimale et valant :

$$\Gamma(\sigma_n) = \min_{\{\text{chemin menant en } \sigma_n\}} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda(\xi_k).$$

Pour chaque état σ_n , on définit un tel survivant et sa métrique associée.

A l'instant $n + 1$, considérons un état particulier noté σ_{n+1} . Il existe exactement $\text{card}(\mathcal{D})$ transitions ξ_{n+1} qui mènent d'un état à l'instant n vers notre état particulier σ_{n+1} . Les métriques associées à chacune de ces $\text{card}(\mathcal{D})$ transitions ont pour métrique :

$$\lambda(\xi_{n+1}) = \Gamma(\sigma_n) + \lambda(\xi_n).$$

Le survivant associé l'état σ_{n+1} est le chemin de métrique minimale :

$$\Gamma(\sigma_{n+1}) = \min_{\{\text{transition } \xi_{n+1} \text{ menant en } \sigma_{n+1}\}} \lambda(\xi_{n+1}) = \min_{\{\text{transition } \xi_{n+1} \text{ menant en } \sigma_{n+1}\}} (\Gamma(\sigma_n) + \lambda(\xi_n)). \quad (2.11)$$

Notons que cette minimisation (2.11) nécessite le calcul de $\text{card}(\mathcal{D})$ fonctions $\lambda(\xi_n)$ et que nous devons poursuivre cette minimisation pour chacun des états σ_{n+1} au nombre de $\text{card}(\mathcal{D})^{L-1}$. Finalement, nous calculons exactement $\text{card}(\mathcal{D})^L$ fonctions $\lambda(\xi_n)$ et ce pour chaque symbole d_n au nombre de $N - L$. C'est exactement ici que s'opère la réduction de complexité. Dans (2.11), la minimisation nécessite le calcul de $\text{card}(\mathcal{D})^{N-L} \times (N + 1)$ fonctions $\lambda(\xi_n)$ et $\text{card}(\mathcal{D})^{N-L} \times N$ additions pour l'estimation de la séquence de $N - L$ symboles. Soit, en considérant $N \gg L$ et en négligeant l'addition par rapport au calcul de $\lambda(\xi_n)$, environ $\text{card}(\mathcal{D})^N$ calcul de $\lambda(\xi_n)$ pour chaque symbole à comparer aux $\text{card}(\mathcal{D})^L$ obtenus ci-dessus grâce au calcul récursif.

Pour obtenir finalement la séquence de symboles, nous nous plaçons au niveau du dernier état. Si l'état d'arrivée est connu (on dit dans ce cas que l'on ferme le treillis), et nous choisissons la séquence de symboles correspondant au survivant *i.e.* au chemin de métrique cumulée minimale. En revanche, si le treillis est ouvert (état d'arrivée non connu), il faut choisir pour dernier état l'état de métrique cumulée minimale et son survivant fournit la séquence optimale au sens du MAP.

Notons qu'en général, il n'est pas nécessaire d'attendre l'état d'arrivée pour décider un symbole. En effet, en considérant les chemins dans l'ordre du temps décroissant, tous les chemins convergent après 2 à 3 fois la taille du canal L [9] voire même 4 à 5 fois. Ainsi, ayant calculé les métriques à l'instant n , nous pouvons alors décider le symbole de l'instant $n - 3L$, ou $n - 3L$ pour plus de sécurité.

2.3.1.1.3 Performances théoriques de l'algorithme de Viterbi sur canal gaussien

Les performances de l'égaliseur de Viterbi sur un canal sélectif en fréquence et à bruit additif gaussien sont déterminés par la *distance minimale* de ce canal notée $d_{min\ canal}$ *i.e.* la plus petite distance entre toutes les séquences filtrées par le canal de réponse impulsionnelle finie. [56, page 598] et [24, 25] montrent que la probabilité d'erreur binaire est asymptotiquement :

$$P_{b,Viterbi} \approx Q \left(\sqrt{2 \frac{\mathcal{E}_b}{N_0} \frac{d_{min\ canal}^2}{d_{min\ BABG}^2}} \right). \quad (2.12)$$

Ce résultat est à comparer avec les performances d'un signal non codé binaire sur un canal non dispersif à bruit additif gaussien (1.8) cf. Section 1.5.1. Après comparaison, nous pouvons définir la *perte du canal* comme la distance asymptotique en dB entre les deux courbes :

$$\text{perte canal} = 10 \log_{10} \left(\frac{d_{min\ BABG}^2}{d_{min\ canal}^2} \right). \quad (2.13)$$

A fort RSB, nous pouvons alors écrire :

$$P_{b,Viterbi} = P_{b,BABG}(\text{RSB} - \text{perte canal}).$$

2.3.1.2 Maximum *a posteriori* par symbole

Afin d'améliorer les performances des récepteurs, il est aujourd'hui admis d'utiliser le décodage à entrée pondérée plutôt que décidée. En effet, dans le cas d'une modulation binaire transmise sur un canal à bruit additif gaussien, le gain apporté par le décodage à entrée pondérée est d'environ 2 dB par rapport au décodage à entrée décidée [56, page 507]. Aussi, les égaliseurs à sortie pondérée (ou douce pour *soft*) bénéficient d'un intérêt tout particulier.

Il existe de nombreuses versions pondérées de l'algorithme de Viterbi, qui proposent d'estimer le logarithme du rapport de vraisemblance [4, 32, 11]. Nous avons choisi ici l'algorithme optimal au sens du MAP par symbole [3], que nous présentons ci-dessous. Notons que [76] propose une simplification du nombre de mémoires utilisées de ce même algorithme.

2.3.1.2.1 Décomposition du critère

Le but de l'algorithme de Bahl *et al.* [3] est de fournir une estimation de la probabilité *a posteriori* d'un symbole :

$$P(d_n = a | \mathbf{r}) = \frac{1}{P(\mathbf{r})} P(d_n = a, \mathbf{r}), a \in \mathcal{D}, \quad (2.14)$$

avec les notations du Tableau 2.1.

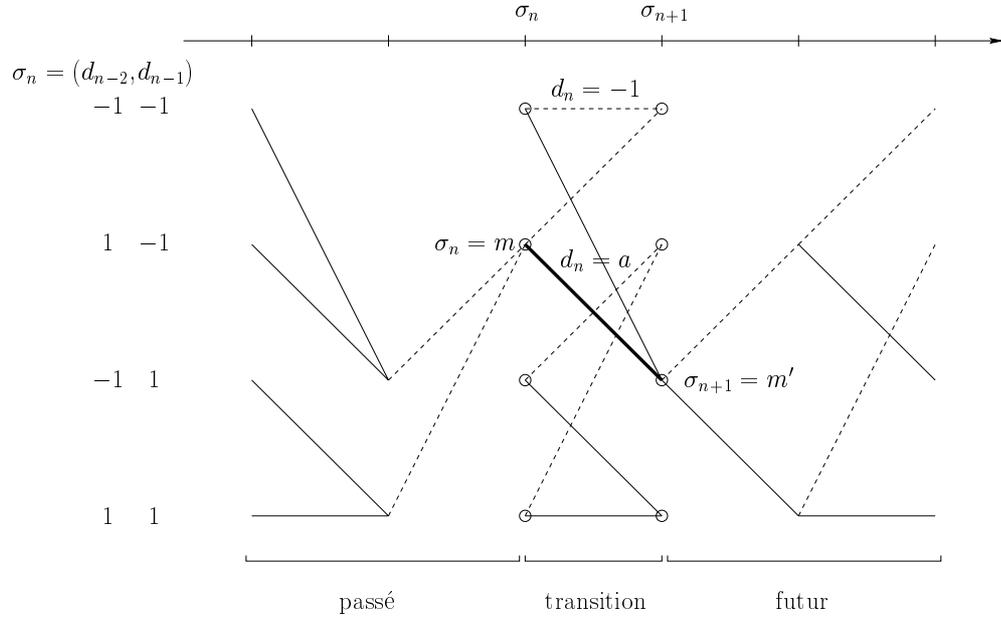


FIG. 2.5 – Explication de l’algorithme MAP.

2.3.1.2.2 Algorithme de Bahl *et al.*

Considérons le treillis défini Figure 2.4. Notons $M = \text{card}(\mathcal{D})^L$ le nombre d’états possibles ($M = 4$ sur la Figure 2.4, $\text{card}(\mathcal{D}) = 2$ et $L = 2$) et plaçons nous à l’instant n .

Quelque soit l’état $\sigma_n = (d_{n-1} \cdots d_{n-L})$, le symbole d_n peut prendre toutes les valeurs possibles de \mathcal{D} . Il y a en effet $\text{card}(\mathcal{D})$ branches qui partent de chaque état. Soit a un élément particulier de \mathcal{D} . Il lui correspond une branche partant de σ_n et ce pour chaque état du treillis. Ainsi la probabilité jointe peut se décomposer :

$$P(d_n = a, \mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{M-1} P(d_n = a, \sigma_n = m, \mathbf{r}). \quad (2.15)$$

Considérons la branche partant de l’état $\sigma_n = m$ et correspondant au symbole émis courant $d_n = a$, branche représentée en trait gras sur la Figure 2.5. Cette branche relie les états $\sigma_n = m$ et $\sigma_{n+1} = m'$. [33, 76] proposent une interprétation astucieuse de la probabilité jointe (2.15) en la décomposant selon trois termes :

$$\begin{aligned} P(\sigma_n = m, d_n = a, \mathbf{r}) &= P(\sigma_n = m, \sigma_{n+1} = m', \mathbf{r}) \\ &= \underbrace{P(\sigma_n = m, \mathbf{r}_0^{n-1})}_{\text{passé}} \underbrace{P(\sigma_{n+1} = m', r_n | \sigma_n = m)}_{\text{transition}} \underbrace{P(\mathbf{r}_{n+1}^N | \sigma_{n+1} = m')}_{\text{futur}} \\ &= \alpha_n(m) \gamma_{n+1}(m, m') \beta_{n+1}(m'). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le terme « passé » $\alpha_n(m)$ calcule la probabilité d’être dans l’état $\sigma_n = m$ en tenant compte de tous les chemins pouvant mener à cet état *i.e.* en connaissant la séquence reçue du passé. Ce terme contient donc les contributions de tous les chemins menant à l’état $\sigma_n = m$. Il se calcule de manière récursive, dans le sens du temps croissant (d’où le terme *forward*) :

$$\alpha_{n+1}(m') = \sum_{m=0}^{M-1} \gamma_{n+1}(m, m') \alpha_n(m).$$

Le terme « transition » $\gamma_{n+1}(m, m')$ en revanche calcule la probabilité de transition pour la branche particulière qui passe de l'état m à l'état m' , à l'instant n , ce qui correspond à une sortie du canal (non bruité) y_n .

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}(m, m') &= P(\sigma_{n+1} = m', r_n | \sigma_n = m) = P(r_n | \sigma_n = m, \sigma_{n+1} = m') P(\sigma_{n+1} = m' | \sigma_n = m), \\ &= \frac{1}{\pi \sigma_w^2} e^{-\frac{\|r_n - y_n\|^2}{\sigma_w^2}} P(\sigma_{n+1} = m' | \sigma_n = m),\end{aligned}\quad (2.17)$$

où le bruit est supposé complexe.

Le terme « futur » $\beta_{n+1}(m')$ contient la contribution de tous les chemins partant de l'état $\sigma_{n+1} = m'$. Il se calcule de manière récursive, dans le sens du temps décroissant (d'où le terme *backward*):

$$\beta_n(m) = \sum_{m'=0}^{M-1} \gamma_{n+1}(m, m') \beta_{n+1}(m').$$

Notons que le terme constant $\frac{1}{\pi \sigma_w^2}$ dans l'équation (2.17) est un coefficient linéaire et n'a donc pas besoin d'être calculé. En revanche, le facteur de la distance $\frac{1}{\sigma_w^2}$ dans l'exponentielle doit l'être. Il en résulte que dans l'algorithme MAP symbole, il faut absolument estimer la puissance du bruit σ_w^2 .

L'algorithme consiste donc à calculer tout d'abord pour chacune des transitions possibles, la probabilité $\gamma_{n+1}(m, m')$. Puis, nous calculons de manière récursive les probabilités « passé » $\alpha_n(m)$ et « futur » $\beta_{n+1}(m')$. Notons que pour le calcul de $\alpha_n(m)$ et $\gamma_{n+1}(m, m')$, nous parcourons le treillis dans le sens du temps croissant, alors que pour $\beta_{n+1}(m')$, le treillis est parcouru dans le sens du temps décroissant, d'où le nom de l'algorithme aller-retour. Enfin, un dernier passage dans le sens croissant du temps permet d'obtenir les probabilités composites $P(d_n = a, \sigma_n = m, \mathbf{r})$ et par une sommation sur les états, nous obtenons finalement la probabilité jointe : $P(d_n = a, \mathbf{r})$.

2.3.2 Égaliseur à structure imposée

Il existe différentes structures imposées pour les égaliseurs. Parmi elles, nous considérons dans la suite les structures linéaires et celles à retour de décision (ou DFE pour *decision feedback equalizer*).

2.3.2.1 Égaliseur linéaire

Un égaliseur est dit linéaire si les échantillons reçus sont filtrés (cf. Figure 2.6). Notons que ce filtre peut être transverse ou récursif. Cependant, un filtre récursif pose des problèmes de stabilité et nous nous intéressons aux structures transverses. Le canal de transmission suit le

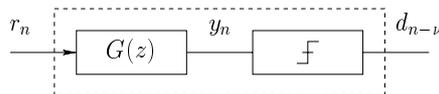


FIG. 2.6 – *Egaliseur linéaire.*

modèle (2.5). L'expression du filtre égaliseur $F(z)$ s'obtient en optimisant un critère, qui peut être celui de forçage de zéro ou celui de l'erreur quadratique moyenne.

2.3.2.1.1 Critère *Zero forcing*

Le critère de forçage à zéro consiste à annuler complètement l'interférence en sortie de l'égaliseur *i.e.* à choisir $F(z)$ tel que :

$$h \star g_n = \delta_n \Leftrightarrow H(z)G(z) = z^{-\nu}.$$

Aussi, on obtient :

$$G(z) = \frac{z^{-\nu}}{H(z)}.$$

Notons que pour que l'égaliseur soit stable, le canal ne doit avoir aucun zéro sur et à l'extérieur du cercle unité.

Cependant, puisque le filtre $G(z)$ tend à annuler toute l'interférence, il tend à compenser les zéros de la fonction de transfert (cf. Figure 2.7), ce qui amplifie le bruit de transmission.

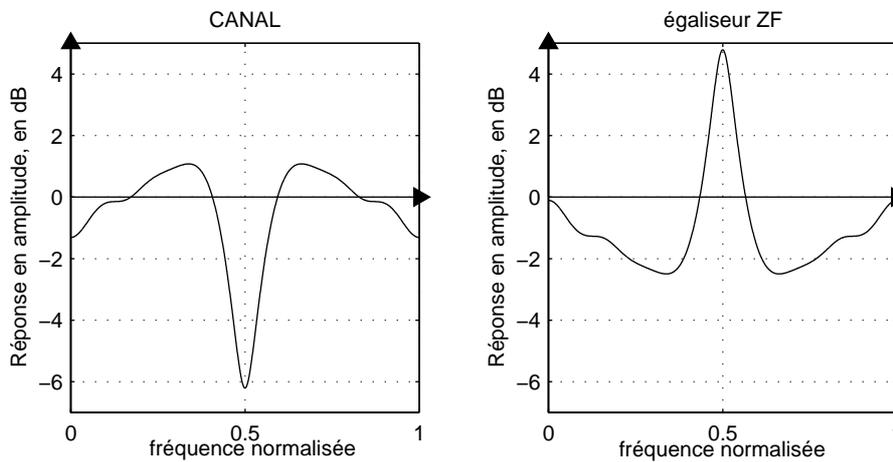


FIG. 2.7 – Amplification du bruit d'un égaliseur *Zero forcing*.

2.3.2.1.2 Critère Erreur Quadratique Moyenne

Puisque le principal écueil du critère *Zero forcing* est d'amplifier le bruit de la transmission, nous considérons ici un critère, qui réalise un bon compromis entre l'annulation d'interférence et la non-amplification du bruit. Ce critère minimise l'erreur quadratique moyenne entre la sortie (non-décidée) de l'égaliseur y_n et les vrais symboles émis d_n :

$$E[|y_n - d_{n-\nu}|^2].$$

L'égaliseur est alors appelé EQMM (erreur quadratique moyenne minimale) ou MMSE (*Minimum mean square error*). [44, page 471] montre que le résultat de la minimisation se factorise selon :

$$G(z) = \underbrace{H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}_{\text{filtre adapté}} \frac{\sigma_d^2 z^{-\nu}}{\sigma_d^2 H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) + \sigma_w^2}.$$

Ainsi, le filtre égaliseur est composé d'une part du filtre adapté au canal et d'autre part d'un filtre qui élimine les interférences. En effet, ce second filtre est l'inverse de l'autocorrélation du canal lorsque la puissance de bruit est faible. En revanche, si cette puissance de bruit est forte, ce filtre réalise un compromis entre élimination des interférences et amplification du bruit.

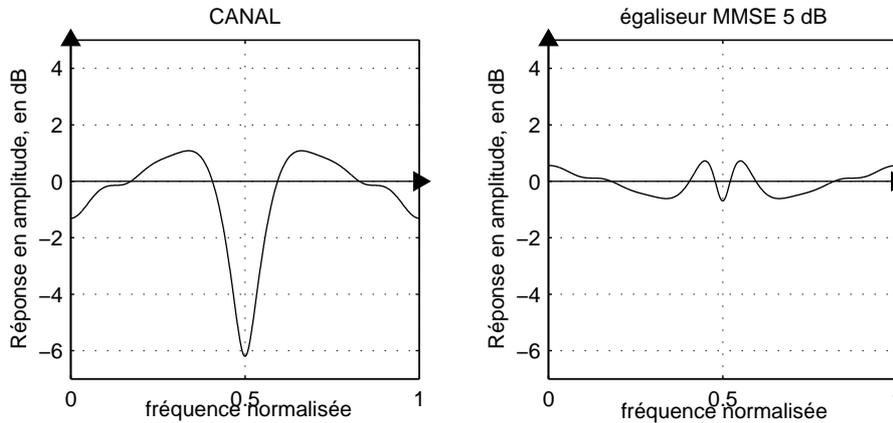


FIG. 2.8 – *Compromis entre amplification du bruit et inversion du canal de l'égaliseur EQMM ou MMSE.*

Notons que, quel que soit le critère (forçage à zéro ou erreur quadratique moyenne), si le canal est à réponse impulsionnelle finie, alors celle de l'égaliseur est de longueur infinie, ce qui est difficile à mettre en œuvre. Aussi, en pratique, l'optimisation est réalisée avec un filtre de longueur finie, ce qui dégrade les performances [51, page 12].

2.3.2.2 Égaliseur de type DFE

Afin d'améliorer les performances des égaliseurs linéaires, nous considérons une structure fortement non-linéaire et appelée à retour de décisions ou (DFE pour *decision feedback equalizer*).

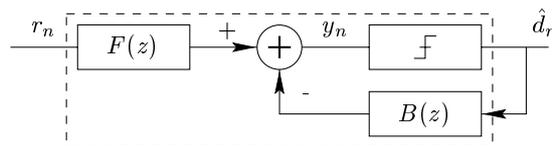


FIG. 2.9 – *Egaliseur DFE.*

L'égaliseur DFE peut être interprété comme un égaliseur à deux entrées. Il est à la fois alimenté par les échantillons reçus r_n et par les décisions passées sur le symbole d_n . De part la construction de cet égaliseur, le filtre retour ne peut être que causal et sans terme constant *i.e.* $b_0 = 0$, car il utilise la sortie du décideur \hat{d}_n , qui ne peut être qu'antérieure à l'instant courant.

Comme dans le cas de l'égaliseur linéaire, il existe deux approches différentes : par forçage à zéro de l'interférence ou en minimisant l'erreur quadratique moyenne.

2.3.2.2.1 Critère *Zero forcing*

[44, page 475] montre que les expressions des filtres avant $F(z)$ et retour $B(z)$ sont :

$$F(z) = H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \frac{1}{H_+^* \left(\frac{1}{z^*} \right)} \frac{1}{h_{+0}},$$

$$B(z) = \frac{1}{h_{+0}} H_+(z) - 1.$$

Notons que la constante de normalisation h_{+0} est le terme constant du filtre $H_+(z)$. Elle permet d'assurer que nous obtenons une estimation pondérée du symbole d_n et non de $h_{+0}d_n$.

La concaténation du canal et du filtre avant fournit :

$$H(z)F(z) = \frac{1}{h_{+0}}H_+(z),$$

un filtre à minimum de phase (par construction de H_+), *i.e.* le filtre, parmi tous les filtres ayant une transformée de Fourier de même amplitude, à énergie maximale au début de la réponse impulsionnelle ($n \simeq 0$). C'est donc le filtre ayant le minimum d'énergie d'interférences annulées par le filtre retour. Ceci permet de minimiser l'effet de propagation d'erreur lorsque les données retournées \hat{d}_n sont erronées.

Puis, le filtre retour vient annuler l'interférence due aux symboles passés. L'interférence due aux symboles futur est quant à elle supprimée par le filtre avant, ce qui provoque, comme dans le cas de l'égaliseur linéaire une amplification du bruit. De plus, si les symboles retournés ne sont pas exacts, cela engendre le phénomène de propagation d'erreur étudié par exemple dans [38].

2.3.2.2 Critère Erreur Quadratique Moyenne

De manière à réduire l'amplification du bruit, nous considérons l'égaliseur DFE minimisant l'erreur quadratique moyenne entre la sortie de l'égaliseur y_n et les vrais symboles d_n . Les expressions des filtres $F(z)$ et $B(z)$ sont obtenues en fonction de la factorisation forte de la densité spectrale puissance complète :

$$\sigma_d^2 H(z)H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) + \sigma_w^2 = H_{+\text{MMSE}}(z)H_{+\text{MMSE}}^* \left(\frac{1}{z^*} \right).$$

Les expressions des filtres avant et retour deviennent :

$$F(z) = \sigma_d^2 H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \frac{1}{H_{+\text{MMSE}}^* \left(\frac{1}{z^*} \right)} \frac{1}{\sqrt{\sigma_d^2 |h_{+0}|^2 + \sigma_w^2}},$$

$$B(z) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_d^2 |h_{+0}|^2 + \sigma_w^2}} H_{+\text{MMSE}}(z) - 1.$$

2.4 Comparaison et performances des égaliseurs

Nous avons présenté ici deux grandes familles d'égaliseur. La première sans contrainte structurelle (cf. Section 2.3.1) résout le problème de l'égalisation de manière optimale au sens du MAP, fournit donc de bonnes performances au prix d'une grande complexité calculatoire. La seconde famille d'égaliseurs considérés ici (cf. Section 2.3.2) permet de maîtriser la complexité en s'imposant une structure à base de filtre(s). Dans ce cas, ces égaliseurs sont pénalisés par des problèmes d'amplification de bruit et/ou de propagation d'erreur. Nous proposons d'illustrer ceci de manière pratique en observant les performances de ces égaliseurs.

Au cours de cette thèse, et dans le cas mono-utilisateur, nous considérerons principalement trois canaux sélectifs en fréquence.

Le premier canal considéré et appelé Proakis B [56, page 616] est un canal difficile car sa distance minimale est si faible qu'elle entraîne une perte (2.13) de -1.757 dB par rapport au canal non dispersif et à bruit additif gaussien et pour une modulation binaire, de phase avec

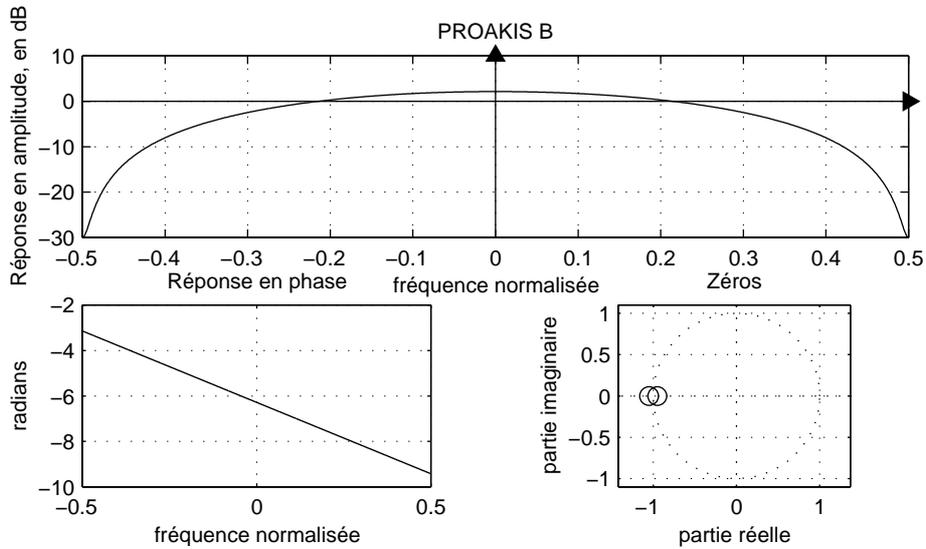


FIG. 2.10 – Canal Proakis B [56, page 616].

une démodulation cohérente. Ses caractéristiques sont représentées Figure 2.10 et montrent un évanouissement de forte amplitude (-30 dB). En revanche, sa phase ne présente aucune distorsion car elle est linéaire.

Le second canal considéré et appelé Proakis C [56, page 616] est quant à lui plus sévère encore que le précédent car sa perte par rapport au canal non dispersif et à bruit additif gaussien vaut -5.007 dB pour une modulation binaire. En effet, ses caractéristiques présentées Figure 2.11 montrent une atténuation d'au moins -5 dB sur plus de la moitié de la bande utile.

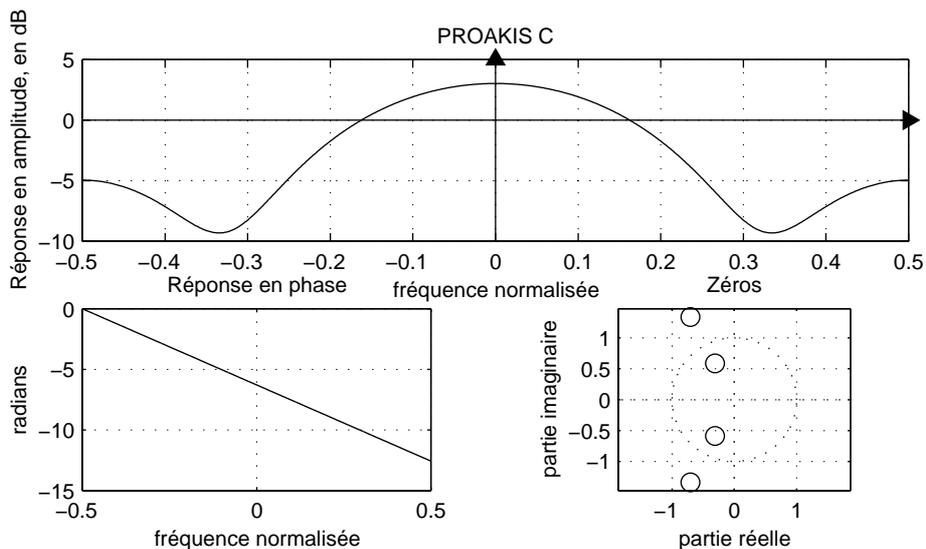


FIG. 2.11 – Canal Proakis C [56, page 616].

Les performances des égaliseurs classiques présentés ci-dessus pour les canaux B et C sont présentées Figure 2.12. Les égaliseurs linéaire et DFE sont optimisés selon le critère de l'erreur quadratique moyenne. L'égaliseur linéaire montre sa difficulté à égaliser des canaux si difficiles. Ainsi, à 20 dB le taux d'erreur binaire (TEB) vaut 10^{-2} pour le canal Proakis B et $7 \cdot 10^{-2}$ pour le Proakis C. Le gain de l'égaliseur DFE par rapport à l'égaliseur linéaire est net et s'explique par le fait que les égaliseurs linéaires $G(z)$, quel que soit le critère, s'expriment en fonction des

filtres avant du DFE de même critère :

$$G(z) = c.H^* \left(\frac{1}{z^*} \right) \frac{z^{-\nu}}{H_1(z)},$$

$$\text{cas ZF} \begin{cases} H_1(z) = H_+(z) \\ c = h_{+0} \end{cases} \quad \text{cas MMSE} \begin{cases} H_1(z) = H_{+\text{MMSE}}(z) \\ c = \sqrt{\sigma_d^2 |h_{+0}|^2 + \sigma_w^2} \end{cases}$$

Ainsi, la différence entre les égaliseurs linéaire et DFE repose sur la manière d'éliminer les interférences dues au filtre à phase minimale $H_1(z)$ *i.e.* soit par l'inversion de cette fonction de transfert (cas linéaire), soit par une boucle retour (cas du DFE). La boucle de retour permet de ne pas filtrer le bruit. De plus, le filtre $H_1(z)$ est à phase minimale. Parmi tous les candidats possibles à la factorisation de l'autocorrélation du canal (cas ZF) ou de la densité spectrale de puissance (cas EQM), $H_1(z)$ est celui dont l'énergie est concentrée au début de la réponse impulsionnelle et qui fournit le rapport signal à bruit en sortie de l'égaliseur le plus grand. De plus, les interférences annulées sont alors de plus faible énergie que le trajet principal, d'où un phénomène de propagation d'erreurs limité.

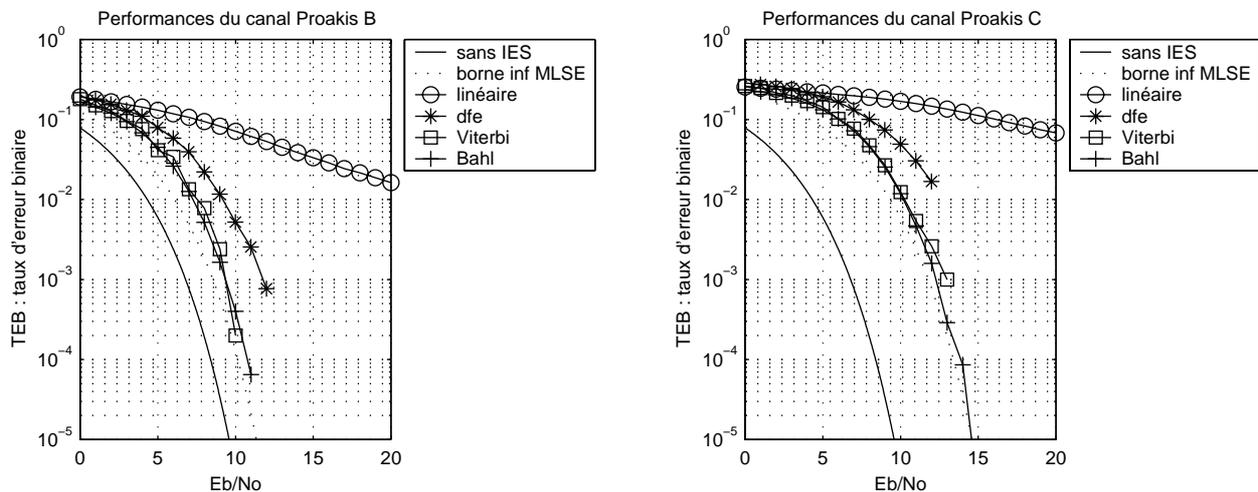


FIG. 2.12 – Performances des égaliseurs classiques pour les canaux Proakis B et C.

D'ailleurs, [43, page 23] montre que le rapport signal à bruit en sortie de l'égaliseur linéaire est toujours inférieur ou égal à celui du DFE, d'où de moins bonnes performances pour l'égaliseur linéaire.

Enfin, nous présentons les performances des égaliseurs optimaux au sens du *maximum a posteriori* et qui fournissent de meilleures performances que les égaliseurs à structure imposée. Que le critère soit séquence ou symbole, les performances sont très proches et tendent à fort rapport signal à bruit vers la borne inférieure (2.12).

Il est à noter que quelles que soient les méthodes d'égalisation utilisées, les performances du canal Proakis C sont toujours inférieures à celles du canal Proakis B, comme l'analyse des canaux nous le laissait prévoir.

Enfin, nous considérerons un canal dont les coefficients de la réponse impulsionnelle sont complexes à la différence des deux cas précédents. Ce canal appelé Porat et Friedlander [55] a différents évanouissements mais en fait, c'est un canal facile à égaliser car sa perte vaut 0 dB par rapport au canal non dispersif et à bruit additif gaussien et pour une modulation binaire. Pour ce canal, nous pouvons nous affranchir quasi-complètement des effets des multitrajets comme

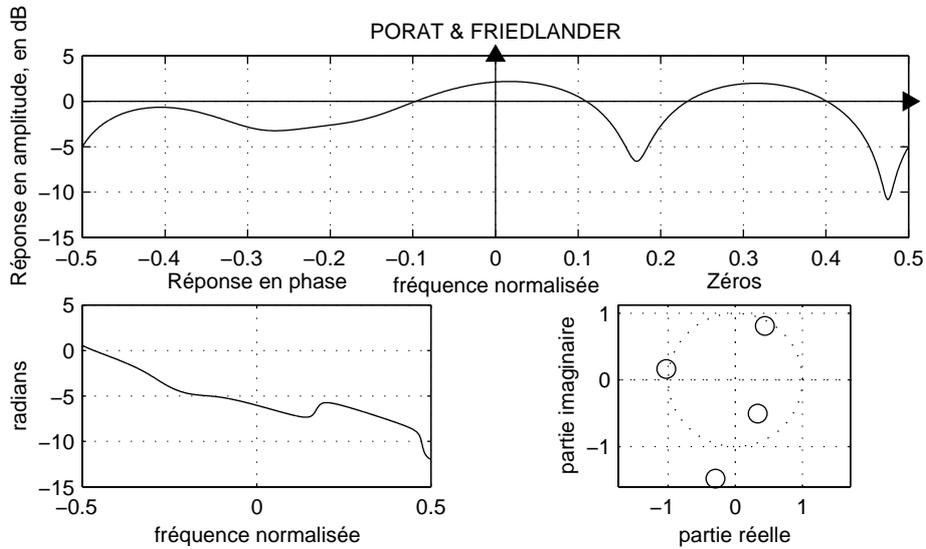


FIG. 2.13 – Canal Porat et Friedlander [55].

le montrent les performances (cf. Figure 2.14) et ce quelle que soit la méthode d'égalisation utilisée.

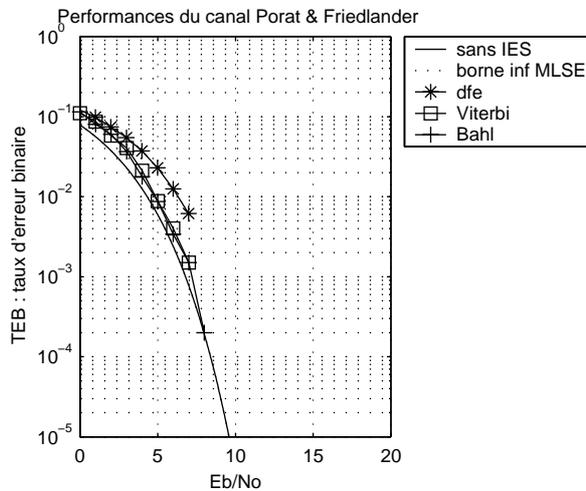


FIG. 2.14 – Performances des égaliseurs classiques pour le canal Porat & Friedlander.

2.5 Caractérisation des canaux

L'étude de l'égaliseur optimal au sens du *maximum a posteriori* par séquence (cf. Section 2.3.1.1.3 et [24]) montre que ses performances (2.12) sont calculées à partir de la distance minimale du canal (à comparer avec celle du canal BABG) et du nombre de séquences donnant cette distance : on peut donc lier les notions de distance minimale et de nombre de séquences à cette distance minimale à celle de difficulté à égaliser un canal.

Dans la suite, nous considérons une modulation de phase, binaire et cohérente (BPSK). Nous calculerons, dans ce cas, la distance minimale du canal BABG. Puis, nous caractériserons les canaux dispersifs en explicitant toutes les paires de séquences dont la distance est plus petite que celle du canal BABG.

2.5.1 Canal à bruit additif blanc gaussien

Montrons que la distance minimale pour ce canal est de 2 dans le cas d'une modulation BPSK. Ce canal est sans mémoire. Aussi, toutes les séquences possibles non bruitées en sortie de ce canal sont donc toutes les séquences possibles composées de 1 ou -1 (pour une modulation BPSK). Aussi, la distance minimale est obtenue pour un motif d'erreur isolé et vaut :

$$d_{min} = \sqrt{(1 - (-1))^2} = 2.$$

2.5.2 Canaux à 2 trajets

Dans ce paragraphe nous considérons le canal $h(z) = 1 + az^{-1}$, avec $a \in \mathbf{C}$. Ce canal effectue la convolution de l'entrée x_n pour donner en sortie y_n . Les relations entrée / sortie du canal sont présentées dans le Tableau 2.2 :

x_n	x_{n-1}	y_n
-1	-1	$y_1 = -1 - a$
-1	1	$y_2 = -1 + a$
1	-1	$y_3 = 1 - a$
1	1	$y_4 = 1 + a$

TAB. 2.2 – Relation entrée/sortie du canal à 2 trajets, à l'instant n .

Considérons toutes les séquences de sortie du canal. Pour des questions de simplicité, nous nous limitons aux séquences de longueur 5. Elles sont obtenues à l'aide du Tableau 2.3 :

y_n	y_{n+1}
y_1	y_1
y_1	y_3
y_2	y_1
y_2	y_3
y_3	y_2
y_3	y_4
y_4	y_2
y_4	y_4

TAB. 2.3 – Loi d'évolution de y_n .

Dès lors toutes les séquences possibles partant et arrivant dans le même état (tout-zéro par exemple) sont données dans le tableau 2.4.

s_1 :	y_1	y_1	y_1	y_1	y_1
s_2 :	y_1	y_3	y_2	y_1	y_1
s_3 :	y_1	y_1	y_3	y_2	y_1
s_4 :	y_1	y_3	y_4	y_2	y_1

TAB. 2.4 – Séquences possibles de y_n .

Et les distances entre toutes ces séquences sont données par le Tableau 2.5.

couples de séquences	$(distance)^2$	$(distance\ normée)^2 = \frac{distance^2}{1+ a ^2}$
s_1, s_2	$4(1 + a ^2)$	4
s_1, s_3	$4(1 + a ^2)$	4
s_1, s_4	$4(1 + a ^2) + 4 1 + a ^2$	$4 + 4\frac{ 1+a ^2}{1+ a ^2}$
s_2, s_3	$4(1 + a ^2) + 4 1 - a ^2$	$4 + 4\frac{ 1-a ^2}{1+ a ^2}$
s_2, s_4	$4(1 + a ^2) + 4 1 - a ^2$	$4 + 4\frac{ 1-a ^2}{1+ a ^2}$
s_3, s_4	$4(1 + a ^2)$	4

TAB. 2.5 – Distances possibles.

Comme il est évident que $\frac{1+|a|^2}{1+|a|^2} > 0$ et $\frac{|1-a|^2}{1+|a|^2} > 0$, nous en déduisons que la distance minimale au carré entre toutes les séquences de longueur 5 vaut 4 soit exactement la valeur de la distance minimale au carré sur le canal BABG. De plus, si nous considérons des séquences plus longues, les motifs supplémentaires d'erreur viendront accroître les distances et donc la distance minimale ne sera pas modifiée. En effet, en augmentant la taille des séquences, deux cas peuvent se produire. Soit de nouveaux motifs d'erreur, qui sont de longueur plus grande que 5, apparaissent. Dans ce cas, ils contiennent au moins les motifs d'erreur vus ci-dessus et sont donc de distance plus grande que toutes celles listées avant. L'autre cas pouvant se produire, lorsque la taille des séquences augmente, est que les motifs d'erreur sont des combinaisons de motifs d'erreur singuliers (*i.e.* composés d'une seule divergence). Dans ce cas, la distance obtenue est la somme des distances de chacun des motifs d'erreur singuliers. D'où des distances plus grandes que celles listées plus haut.

$$d_{min} = 2$$

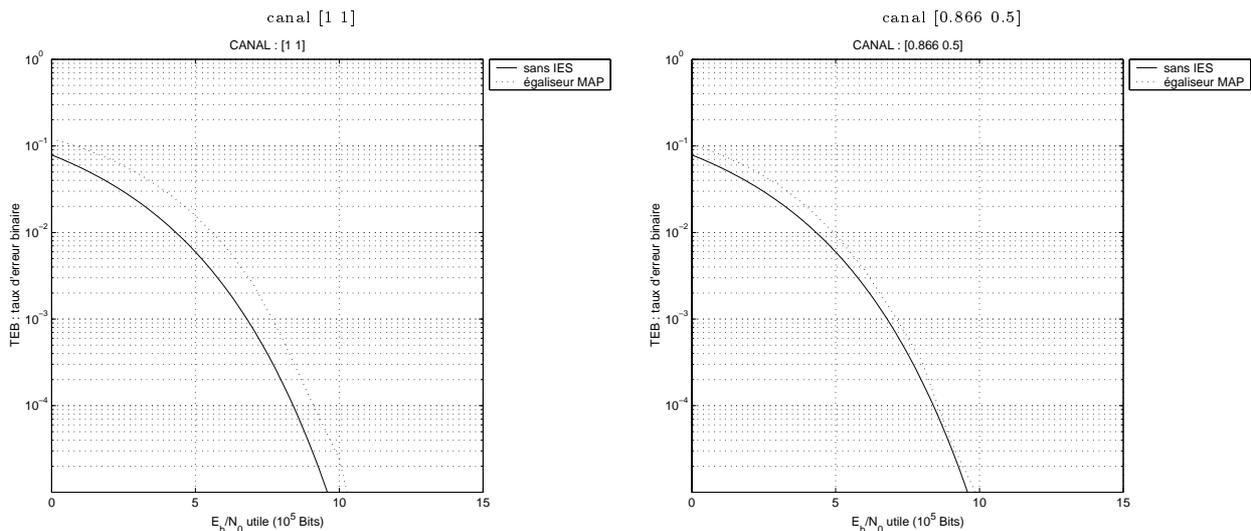


FIG. 2.15 – Performances de l'égaliseur MAP pour des canaux à 2 coefficients.

Ce résultat est illustré à la Figure 2.15 et donne les performances asymptotiques d'un égaliseur optimal au sens du maximum de vraisemblance quelque soit le canal *i.e.* quelque soit la position du zéro (-a ici) et en particulier lorsque ce zéro est situé sur le cercle unité. Notons que les performances du récepteur dépendent en fait de la distance minimale mais aussi du nombre de couples de séquences donnant cette distance minimale, facteur multiplicatif, qui intervient surtout à faible RSB, d'où l'écart dans les courbes de la Figure 2.15.

Nous en déduisons donc que, pour une modulation binaire, TOUS les canaux à deux coefficients peuvent être parfaitement égalisés, *i.e.* qu'avec un égaliseur optimal au sens du maximum de vraisemblance, nous obtenons les mêmes performances que sur le canal BABG (à un coefficient multiplicatif près). Notons que ceci n'est pas un résultat classique en égalisation.

2.5.3 Canaux à 3 trajets

Dans cette section, nous nous intéressons aux canaux à 3 coefficients dont la distance minimale est plus faible que 2, *i.e.* plus faible que la distance minimale du canal BABG. Puis, nous essayons de déterminer, pour ce canal dispersif, toutes les paires de séquences entrant dans le canal qui donnent en sortie une distance plus faible que 2. Ainsi, dans la suite les motifs d'erreur sont toujours relatifs aux séquences d'entrée du canal alors que la distance entre séquences est toujours calculée pour les séquences de sortie.

Pour la suite, nous caractérisons une paire de séquences par un motif d'erreur soit la différence entre les deux séquences. Une erreur dans ce motif correspond à un élément non nul de cette soustraction *i.e.* une différence entre les 2 séquences.

2.5.3.1 Cas d'une erreur isolée

Notons de suite, qu'une erreur isolée et unique dans un motif donne exactement la distance du canal BABG soit 2, si le canal dispersif est normalisé. En effet, notons x^1 et x^2 les 2 séquences d'entrée, et notons y^1 et y^2 les 2 séquences de sortie. Par hypothèse, x^1 et x^2 diffèrent en 1 symbole d'indice m : $x_m^1 \neq x_m^2$. Notons h_i les coefficients du canal, N la taille des séquences et L la longueur du canal. On a :

$$y_i^1 = \sum_{k=0}^L h_k x_{i-k}^1 = \sum_{j=i-L}^i h_{i-j} x_j^1.$$

Dès lors, la distance s'écrit :

$$\|y^1 - y^2\|^2 = \sum_{i=0}^N |y_i^1 - y_i^2|^2 = \sum_{i=0}^N \left| \sum_{j=i-L}^i h_{i-j} \underbrace{(x_j^1 - x_j^2)}_{e\delta_{jm}} \right|^2 = \sum_{i=0}^N |h_{i-m}|^2 |e|^2 = \sum_{l=-m}^{N-m} |h_l|^2 |e|^2,$$

et si m tel que $N - m \geq L$ alors :

$$\|y^1 - y^2\|^2 = \underbrace{\left(\sum_{l=0}^L |h_l|^2 \right)}_{1 \text{ pour un canal normalisé}} \underbrace{|e|^2}_{4 \text{ pour une modulation BPSK}} = 4.$$

La distance $\|y^1 - y^2\|$ vaut donc bien 2. Comme tout canal a forcément cette distance, on en déduit que la distance normalisée associée au canal normalisé est inférieure ou égale à 2.

2.5.3.2 Cas des canaux à 2 zéros complexes conjugués et de module 1

Une recherche exhaustive comme dans le §2.5.2 n'était intéressante que pour des séquences de longueur importante, mais alors le calcul théorique des différentes distances devenait trop

long. La méthode que nous proposons pour obtenir l'expression théorique des distances est la suivante :

1. Simulation, pour une longueur de séquence choisie, de toutes les séquences possibles d'entrée qui partent et convergent vers le même état. Puis calcul de la sortie du canal pour chacune de ces séquences. Enfin, calcul des distances prises 2 à 2 de ces séquences de sortie,
2. Tri des paires de séquences dans l'ordre croissant de la distance (calculée en sortie),
3. Pour une distance donnée, visualisation des paires de séquences donnant cette distance (évaluée numériquement) et calcul théorique pour ces séquences de la distance.

Pour un canal donné, on est alors en mesure de donner les paires de séquences donnant une certaine distance et de définir notamment celles qui donnent la distance minimale.

Notons que le calcul n'est pas exhaustif car nous limitons la longueur des séquences générées et de plus, il ne nous était pas possible de considérer tous les canaux possibles.

Considérons un canal non normalisé à 2 zéros complexes conjugués sur le cercle unité et notons $\cos \theta$, la partie réelle de ces zéros. Le canal s'écrit :

$$h(z) = \frac{1}{2 + a^2} \cdot (1 + az^{-1} + z^{-2}), \text{ avec } a = -2 \cos \theta$$

Notons que $h(z)$ est symétrique. Nous considérons tout d'abord le cas : $\cos \theta > 0$.

Notre étude nous a montré, que les motifs d'erreur sur les séquences d'entrée du canal pouvant donner une distance au carré < 4 (après convolution par le canal) sont du type :

$$\underbrace{\overbrace{-2 \dots -2}^{l_1+2} 0 \dots 0 \overbrace{2 \dots 2}^{l_2+2} 0 \dots 0 \overbrace{-2 \dots -2}^{l_3+2} 0 \dots 0 2 \dots 2 \dots \overbrace{-2 \dots -2}^{l_{n+1}+2}}_{n+1 \text{ groupes de } l_i + 2 \text{ erreurs}} \quad (2.18)$$

De fait, les erreurs sont réparties en $n+1$ groupes, où chaque groupe contient exactement $l_i + 2$ erreurs ($l_i \geq 0$). Dans un groupe, toutes les erreurs sont égales : un groupe est donc de la forme soit $-2 -2 -2 \dots -2 -2 -2$ soit $2 2 2 \dots 2 2 2$. De plus, deux groupes qui se suivent ont des erreurs opposées. Un tel motif d'erreur entre deux séquences donne en sortie du canal (normalisé) une distance :

$$d^2 = 8 \left(\frac{1 + (1+n)(1+a)^2}{2+a^2} \right) + 4L \frac{(2+a)^2}{2+a^2} \quad (2.19)$$

avec $L = \sum_{i=1}^{n+1} l_i \geq 0$, et $n \geq 0$

Une recherche exhaustive sur toutes les séquences de longueur 14 (en entrée du canal) pour des séquences partant et arrivant au même état, testée sur un grand nombre de canaux, n'a pas fait apparaître d'autres motifs d'erreur. On peut supposer qu'il n'y en a pas d'autres. Et on obtient (cf. Annexe A) que la distance au carré strictement inférieure à 4 est caractérisée par :

$$d^2 < 4 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{n+1+L - \sqrt{\frac{n+L-nL+1}{2}}}{2n+1+L}}_{b_1} < \cos \theta < \underbrace{\frac{n+1+L + \sqrt{\frac{n+L-nL+1}{2}}}{2n+1+L}}_{b_2}$$

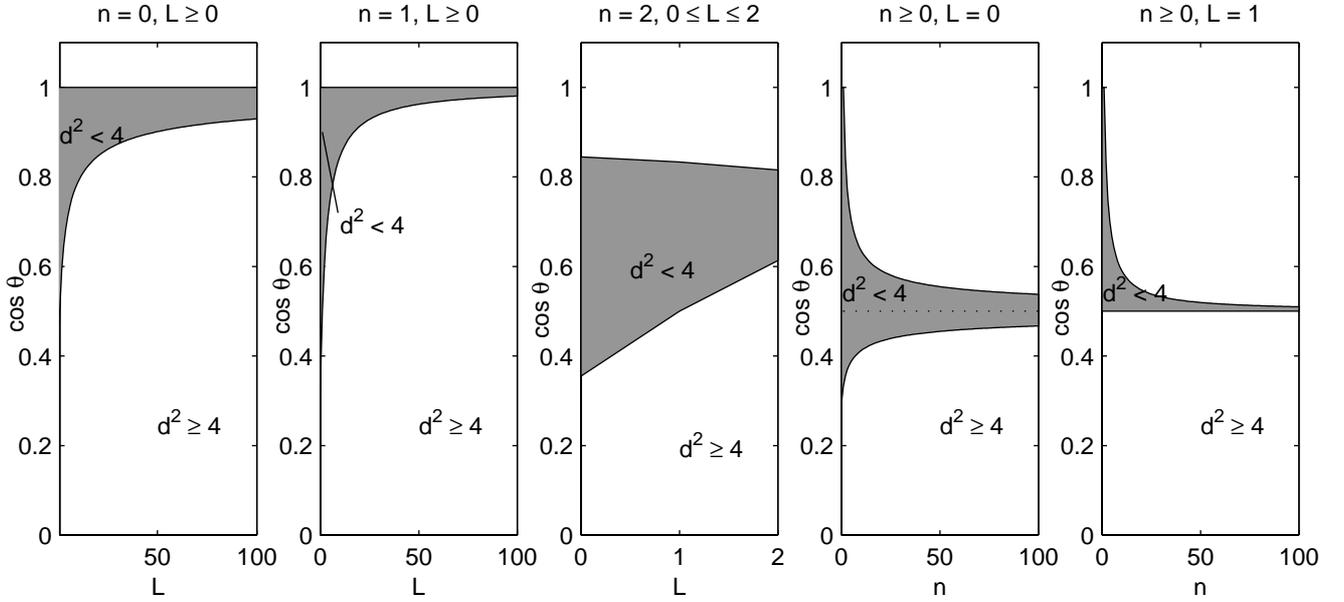


FIG. 2.16 – Valeurs de $\cos \theta$ où les motifs d'erreur, définis par les variables (n, L) , fournissent une distance minimale en sortie du canal inférieure à celle du canal BABG.

Notons que ces 2 bornes b_1 et b_2 n'existent pas toujours : il faut $n + L - nL + 1 > 0$. Remarquons, en effet, que : $n + L - nL + 1 = 0 \Rightarrow \alpha < \cos \Theta < \alpha$ et il n'y a pas de valeurs possibles pour $\cos \theta$. La condition $n + L - nL + 1 > 0$ (cf. Annexe A) implique que les bornes b_1 et b_2 n'existent que dans les cas suivants :

- $n = 0$ et $L \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{1 + L - \sqrt{\frac{L+1}{2}}}{L + 1} < \cos \theta < \underbrace{\frac{1 + L + \sqrt{\frac{L+1}{2}}}{L + 1}}_{>1} \Rightarrow b_1 = \frac{1 + L - \sqrt{\frac{L+1}{2}}}{L + 1} < \cos \theta < 1 = b_2$$

Dans ce cas, le motif d'erreur défini par L et n donne une distance plus faible que 2 après le canal défini par $\cos \theta$ compris dans la zone hachurée de la figure 2.16 en haut à gauche. Ainsi cette zone délimite les canaux dont la distance minimale est plus faible que 2 *i.e.* des canaux difficiles à égaliser. Il est intéressant de noter que cette zone correspond à des valeurs de $\cos \theta$ proche de 1.

- $n = 1$ et $L \geq 0 \Rightarrow$

$$b_1 = \frac{1 + L}{3 + L} < \cos \theta < 1 = b_2$$

Dans ce cas, le motif d'erreur défini par L et n donne une distance plus faible que 2 après le canal défini par $\cos \theta$ compris dans la zone hachurée de la figure 2.16 en haut à droite. Ainsi cette zone délimite les canaux dont la distance minimale est plus faible que 2 *i.e.* des canaux difficiles à égaliser. Comme dans le cas précédent la zone délimitée correspond à des valeurs de $\cos \theta$ proche de 1 (cf. commentaire ci-dessus).

Notons que dans les cas $n = 0$ ou $n = 1$, *i.e.* que le motif d'erreur comporte 1 ou 2 groupes, si $\cos \theta = 1$ ($a = -2$), le nombre d'erreurs L tend vers ∞ . En effet, dans ce cas l'expression de la distance (cf. (2.20)) devient indépendante de L et vaut : $d^2 = \frac{4}{3}(2 + n)$. Ce cas limite

($\cos \theta = 1$) est intéressant à remarquer car il y a une infinité de motifs d'erreur qui donnent des distances plus faibles que 2. Ces canaux semblent difficile à protéger par un code qui devrait alors pouvoir supprimer une infinité de séquences. Notons que le cas $\cos \theta = 1$ correspond à un canal de réponse impulsionnelle $[1 \ -2 \ 1]$. Il est intéressant que notre étude permette de retrouver un canal réputé très difficile dans la littérature d'égalisation. En effet, nous considérons dans tout ce paragraphe les canaux avec 2 zéros placés sur le cercle unité (hypothèse de départ), ce qui implique de fortes atténuations de la réponse fréquentielle de ce canal. La particularité du cas $\cos \theta = 1$, réside dans le fait que les 2 zéros sont confondus, ce qui implique une atténuation très forte et très étalée.

- $n = 2$ et $0 \leq L \leq 2 \Rightarrow$

$$b_1 = \frac{3 + L - \frac{3-L}{2}}{5 + L} < \cos \theta < \frac{3 + L + \frac{3-L}{2}}{5 + L} = b_2$$

Dans ce cas, le motif d'erreur défini par L et n donne une distance plus faible que 2 après le canal défini par $\cos \theta$ compris dans la zone hachurée de la figure 2.16 au milieu. Ainsi cette zone délimite les canaux dont la distance minimale est plus faible que 2 *i.e.* des canaux difficiles à égaliser. Il est intéressant de noter que cette zone correspond à des valeurs de $\cos \theta$ proche de 0.5.

- $n \geq 0$ et $L = 0 \Rightarrow$

$$b_1 = \frac{n + 1 - \frac{n+1}{2}}{2n + 1} < \cos \theta < \frac{n + 1 + \frac{n+1}{2}}{2n + 1} = b_2$$

Dans ce cas, le motif d'erreur défini par L et n donne une distance plus faible que 2 après le canal défini par $\cos \theta$ compris dans la zone hachurée de la figure 2.16 en bas à gauche. Ainsi cette zone délimite les canaux dont la distance minimale est plus faible que 2 *i.e.* des canaux difficiles à égaliser. Il est intéressant de noter que cette zone correspond à des valeurs de $\cos \theta$ proche de 0.5.

- $n \geq 0$ et $L = 1 \Rightarrow$

$$b_1 = \frac{1}{2} < \cos \theta < \frac{n + 3}{2n + 2} = b_2$$

Dans ce cas, le motif d'erreur défini par L et n donne une distance plus faible que 2 après le canal défini par $\cos \theta$ compris dans la zone hachurée de la figure 2.16 en bas à droite. Ainsi cette zone délimite les canaux dont la distance minimale est plus faible que 2 *i.e.* des canaux difficiles à égaliser. Il est intéressant de noter que cette zone correspond à des valeurs de $\cos \theta$ proche de 0.5.

Notons un autre cas limite intéressant. Lorsque $L = 0$ ou $L = 1$, *i.e.* que le motif d'erreur comporte des groupes de seulement 2 ou 3 éléments, le nombre de groupes $n + 1$ tend alors vers ∞ si $\cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -1$. En effet, dans ce cas l'expression de la distance est indépendante de n , à partir de (2.20) on obtient : $d^2 = \frac{1}{3}(8 + 4L)$. Dans ce cas également, parce qu'il y a une infinité de motifs d'erreur donnant une distance plus faible que 2, ce canal semble difficile à protéger par un code. Notons que le cas $\cos \theta = \frac{1}{2}$ correspond à un canal de réponse impulsionnelle $[1 \ -1 \ 1]$. Il est intéressant de noter que là aussi, nous retrouvons un canal réputé très difficile dans la littérature d'égalisation car composé de 3 trajets de même puissance.

Dans le cas, où $\cos \theta < 0$ nous obtenons les mêmes résultats. Seul le motif d'erreur change et devient :

$$\underbrace{\overbrace{-2 \ 2 \ -2 \ \dots \ -2}^{l_1+2} \ 0 \ \dots \ 0 \ \overbrace{2 \ -2 \ 2 \ \dots \ -2}^{l_2+2} \ 0 \ \dots \ 0 \ \overbrace{2 \ -2 \ 2 \ \dots \ 2}^{l_3+2} \ \dots \ \overbrace{-2 \ 2 \ -2 \ \dots \ 2}^{l_{n+1}+2}}_{n + 1 \text{ groupes de } l_i + 2 \text{ erreurs}}$$

Ici, à l'intérieur d'un groupe, les erreurs sont alternées et l'erreur d'une fin de groupe est différente du début de groupe suivant. Les courbes de $\cos \theta$ fonction de n et L sont juste de signe opposé à celui des Figures 2.16 mais avec les mêmes interprétations. La distance de tels motifs vaut alors :

$$d^2 = 8 \frac{1 + (1+n)(1-a)^2}{2+a^2} + 4L \frac{(2-a)^2}{2+a^2}$$

On retrouve ici encore les cas limites $a = 1$ *i.e.* $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $a = 2$ *i.e.* $\cos \theta = -1$, où il y a une infinité de motifs d'erreur pouvant donner des distances plus faibles que celle du BABG.

2.5.3.3 Cas des canaux à 2 zéros réels inverses

Considérons le canal ayant pour zéros α et $\frac{1}{\alpha}$:

$$h(z) = \frac{1}{2+a^2} \cdot (1 + az^{-1} + z^{-2}), \text{ avec } a = -\alpha - \frac{1}{\alpha}$$

Sans aucune perte de généralité, nous pouvons imposer la condition $\alpha \leq 1$ (nous examinons quand même tous les canaux à 2 zéros réels inverses).

L'étude exhaustive menée sur toutes les séquences de longueur 14 avec un grand nombre de canaux montre que, dans le cas où $\alpha > 0$, les motifs d'erreur donnant une distance plus faible que 2 sont ceux définis en (2.18) avec $n = 0$: *i.e.* le motif d'erreur contient un seul groupe d'erreur composé de $l + 2$ éléments.

La distance d'un tel motif d'erreur défini par l est en effet plus faible que 2 lorsque :

$$1 + \sqrt{\frac{1}{2(l+1)}} - \sqrt{\frac{1}{2(l+1)} + \sqrt{\frac{2}{l+1}}} < \alpha \leq 1$$

2.5.3.4 Lien avec les canaux Proakis B et C

Notons que le canal Proakis B [56, page 616] de réponse impulsionnelle $[0.407, 0.815, 0.407]$ est proche du cas des canaux à 2 zéros réels inverses avec $\alpha = -0.95$.

En effet, les motifs d'erreur donnant après ce canal Proakis B des distances plus petites que 2 sont donnés Tab. 2.6.

d^2	motif d'erreur
2.66885	00...0 -2 2 0..0
2.66886	00...0 -2 2 -2 0..0
2.66886	00...0 -2 2 -2 2 0..0
2.66886	00...0 -2 2 -2 2 -2 0..0
4	00...0 -2 0..0

TAB. 2.6 – Motifs d'erreur pour le canal Proakis B.

Quant au canal Proakis C [56, page 616] de réponse impulsionnelle $[0.227, 0.460, 0.688, 0.460, 0.277]$, il a des caractéristiques intéressantes (cf. Figure 2.11) car ses zéros sont situés à un angle d'environ $\frac{2\pi}{3}$, ce qui est proche du cas limite décrit ci-dessus, où il y a une infinité de séquences donnant une distance plus faible que 2. De plus sa distance minimale est très faible et vaut 1.12, ce qui représente une perte de 5 dB par rapport au canal BABG.

2.5.4 Conclusion sur la caractérisation des canaux

L'étude de cas poursuivie dans cette section 2.5, nous a permis d'expliciter des canaux dispersifs dont la distance minimale est plus faible que celle du canal BABG et qui fournissent donc, avec l'égaliseur optimal au sens MAP séquence, de moins bonnes performances que le canal de référence BABG. Pour des questions évidentes de complexité calculatoire, nous nous sommes limités aux canaux à 2 trajets et parmi les canaux à 3 trajets, nous nous sommes limités aux cas des canaux à 2 zéros réels inverses, (car il s'agit quasiment du cas du canal Proakis B) mais aussi aux canaux à 2 zéros complexes conjugués et de module 1. Ce dernier cas nous permet d'aborder le cas des canaux avec des zéros sur le cercle unité, ce qui correspond à des canaux difficiles dans la littérature classique d'égalisation.

En effet, lorsqu'un zéro est placé sur le cercle unité, il lui correspond dans la fonction de transfert un fort évanouissement. Ainsi, si l'on cherche à égaliser en inversant la fonction de transfert du canal (égaliseur linéaire *Zero forcing*), le zéro devient un pôle, qui rend l'égaliseur instable. Dans notre étude, nous avons discriminé les canaux selon leurs distances minimales *i.e.* selon les performances de l'égaliseur MAP séquence. Cette étude est originale et fournit des résultats différents de ceux obtenus avec l'égaliseur linéaire : tous les zéros du cercle unité ne sont pas égaux ! Certains donnent des canaux dont la distance minimale est celle du BABG. Pour ceux-là, les interférences peuvent être complètement éliminées avec un égaliseur optimal MAP séquence, ce qui n'est pas le cas avec un égaliseur linéaire (puisque les zéros sont placés sur le cercle unité). Pour d'autres en revanche, la distance minimale est plus faible que celle du BABG et le nombre de séquences donnant cette distance minimale peut être infini, d'où de très mauvaises performances même avec l'égaliseur optimal MAP séquence.

Nous nous permettons maintenant d'extrapoler nos résultats et de proposer une règle de classement des canaux avec deux zéros sur le cercle unité (ou proche de celui-ci). Il existe en fait deux cas critiques : lorsque les zéros sont confondus, l'évanouissement est alors particulièrement fort ; lorsque l'angle entre les deux zéros est de $2\pi/3$, la plage de l'évanouissement couvre alors une très grande partie de la bande. D'autre part, nous avons montré que le premier cas est proche du cas du canal Proakis B et que le second est proche du canal Proakis C. Ainsi, malgré notre surprise devant ces résultats quelque peu insolites, il est rassurant de retrouver par notre étude de cas les canaux difficiles donnés en exemple par Proakis [56, pages 601 et 617].

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit dans un premier temps le problème de l'égalisation en tant que méthode de réduction des interférences engendrées par les canaux sélectifs en fréquence et appelées interférences entre symboles. Nous avons accordé une attention toute particulière au choix du modèle du canal, privilégiant un cas plus réaliste vis-à-vis de la mise en œuvre (filtrage adapté numérique plutôt qu'analogique), bien que cela puisse entraîner une perte d'information, car la condition de statistiques suffisantes n'est alors pas vérifiée.

Nous avons ensuite présenté les grandes familles d'égaliseur, où la réponse impulsionnelle est soit connue soit préalablement estimée. Nous avons distingué les méthodes avec et sans contrainte structurelle. Lorsqu'aucune contrainte n'est imposée sur la structure, le critère d'optimisation peut être celui du *maximum a posteriori* par séquence et conduit à l'algorithme de Viterbi, ou bien il peut être celui du *maximum a posteriori* par symbole et conduit alors à l'algorithme de Bahl *et al.* Les performances et la complexité de ces deux algorithmes sont com-

parables. En revanche, ils diffèrent de part la nature des données en sortie de l'égaliseur. Ainsi, si une donnée pondérée est nécessaire, nous choisirons l'algorithme de Bahl et si une donnée décidée est suffisante, nous choisirons alors l'algorithme de Viterbi. Ces deux égaliseurs étant optimaux au sens du MAP, ils fournissent de bonnes performances au prix d'une complexité exponentielle en la longueur du canal. Aussi, pour réduire cette complexité, nous pouvons imposer une structure de filtre linéaire. Ce filtre est alors optimisé selon un critère de forçage à zéro (ZF pour *Zero Forcing*) ou d'erreur quadratique moyenne EQM. Le critère ZF fournit un égaliseur qui inverse la fonction de transfert du filtre (et amplifie de ce fait le bruit), alors que le critère EQM permet un bon compromis entre amplification du bruit et inversion du canal. C'est ce dernier qui est le plus couramment utilisé mais nécessite l'estimation de la puissance de bruit de la transmission. La complexité d'un tel algorithme est linéaire en la longueur du canal. Avec une complexité du même ordre de grandeur, il existe une autre structure, qui est celle avec une boucle de retour ou dite DFE pour *Decision Feedback equalizer* et les critères sont également ZF ou EQM. Les performances sont ici meilleures que l'égaliseur linéaire.

Nous avons ensuite comparé les performances de ces égaliseurs pour confirmer la supériorité des algorithmes sans contrainte structurelle.

Puis, nous nous sommes intéressés plus avant à l'égaliseur optimal au sens du MAP séquence (ou algorithme de Viterbi) et avons, pour ce faire, proposé une étude de cas des canaux donnant de mauvaises performances avec cet égaliseur. Cette étude intéressante a permis de montrer, entre autre, qu'un canal avec un zéro sur le cercle unité n'est pas toujours un canal difficile à égaliser avec l'algorithme de Viterbi, au contraire de l'égaliseur linéaire.

Notons que toutes les méthodes d'égalisation présentées dans ce chapitre peuvent intégrer une information *a priori* sur les symboles émis d_n . Ceci est explicite dans les méthodes de type MAP. Quant aux méthodes à structure imposée, il est possible d'ajouter lors de l'optimisation des filtres une information relative aux statistiques du second ordre de d_n . Néanmoins, l'égaliseur ne dispose pas de cette information *a priori* et une hypothèse courante consiste à supposer les symboles indépendants.

Cette hypothèse est fautive notamment lorsque les symboles sont issus d'un codeur, ce qui est le cas dans de nombreuses normes (GSM,...). Nous nous proposons d'étudier dans le chapitre suivant le Turbo-égaliseur, qui, par sa structure itérative permet de tenir compte du codage pendant l'égalisation.

Chapitre 3

Turbo-égalisation : principe et performances

3.1 Introduction

Fort des chapitres précédents, qui présentent le codage de canal et l'égalisation, nous pouvons maintenant introduire plus avant le thème principal de notre étude à savoir l'amélioration des performances des récepteurs composés d'un égaliseur et d'un décodeur. Il est à noter que le problème que nous posons, concerne un très grand nombre d'applications. En effet, nombreux sont les récepteurs qui utilisent à la fois un égaliseur (pour compenser les perturbations dues à un canal de transmissions sélectif en fréquence) et un décodeur pour améliorer encore les performances.

Nous nous intéressons tout d'abord à la solution disjointe, que beaucoup de systèmes actuels utilisent. Nous nous poserons alors la question des limitations d'une telle approche, tout en présentant quelques tentatives d'amélioration. Ceci nous amènera à poser le problème plus global de l'égalisation et du décodage conjoints. Nous en présenterons la solution optimale trop complexe, puis quelques solutions sous-optimales. Parmi ces dernières, nous nous intéresserons plus avant aux méthodes Turbo [18, 43] et parmi elles à la Turbo-égalisation, solution très peu complexe [43], dont les performances prometteuses nous semblent intéressantes à analyser de façon plus approfondie.

Ainsi, nous consacrons une première partie à la présentation générale du Turbo-égaliseur : sa structure itérative, les éléments constitutants chacun des modules et la nature des données à passer d'un élément à l'autre. Puis, fera suite une analyse des performances du Turbo-égaliseur. Nous verrons en effet l'allure des courbes, afin de caractériser le phénomène Turbo. Ceci nous permettra de proposer une amélioration de la structure actuelle.

3.2 Egalisation et décodage disjoints

Dans de nombreuses normes actuelles, le récepteur est composé d'un égaliseur puis d'un décodeur. Nous appelons cette approche disjointe. Ainsi, dans la norme GSM, le récepteur contient tout d'abord un égaliseur de Viterbi (cf. Section 2.3.1.1). Lui fait directement suite un décodeur de Viterbi, qui est alimenté par les estimations décidées des symboles émis. La Figure 3.1 montre la sous-optimalité de cette approche disjointe.

En effet, sur la Figure 3.1 nous présentons les performances du canal BABG et du décodeur de Viterbi pour ce même canal. La distance entre ces deux courbes fournit donc le gain de codage, comme défini en (1.10). Puis, nous considérons le cas d'un canal sélectif en fréquence : le canal Proakis B, présenté Section 2.4. Pour ce canal, nous présentons les performances après l'égaliseur MAP symbole soit à peu près les performances après l'égaliseur de Viterbi ou MAP séquence. En effet, nous avons vu dans la Section 2.4) que ces deux égaliseurs donnent des performances très proches en terme de taux d'erreur binaire, aussi nous ne représentons qu'une de ces courbes pour ne pas surcharger la figure.

La courbe avec les croix représente exactement le cas du GSM que nous avons présenté ci-dessus, à savoir un égaliseur Viterbi avec sortie décidée alimentant un décodeur de Viterbi. Notons qu'avec cette approche disjointe, nous n'obtenons pas au niveau du décodeur le gain de codage escompté. Certains constructeurs (Motorola, ...) ont proposé une amélioration de ce récepteur, en pondérant l'information issue de l'égaliseur. La puissance de bruit est estimée pour un bloc de données en sortie de l'égaliseur, ce qui permet de calculer un coefficient de pondération affecté à ce même bloc. La pondération optimale par symbole est en fait obtenue avec l'égaliseur MAP symbole (cf. [3] et Section 2.3.1.2) et la courbe avec les points présente les performances du récepteur disjoint avec pondération symbole optimale. Néanmoins, même dans ce cas le gain de codage escompté n'est pas atteint avec le décodeur.

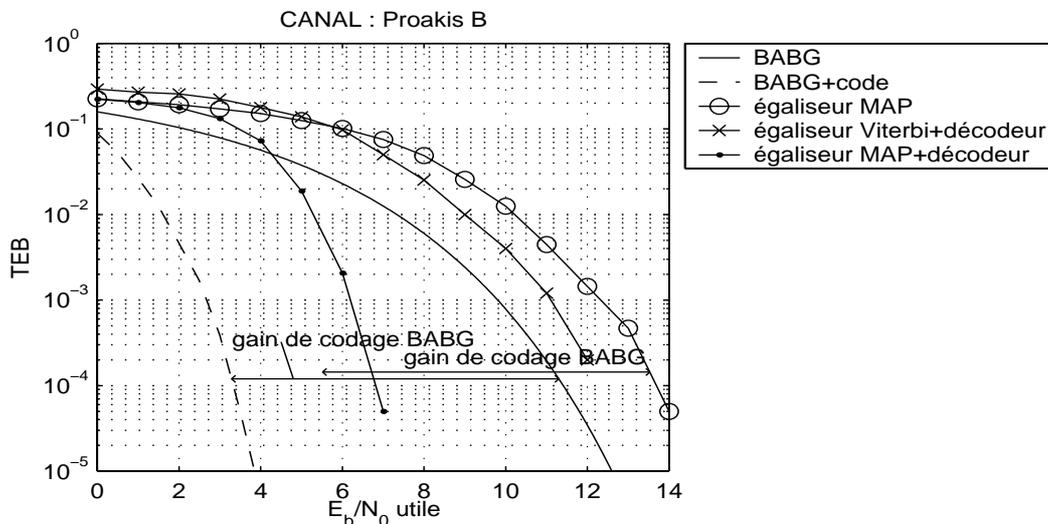


FIG. 3.1 – Performances du récepteur disjoint.

Du fait des limitations de l'approche disjointe, nous nous intéressons maintenant aux approches conjointes et nous interrogeons sur leurs performances. L'approche conjointe peut elle atteindre le gain de codage... voire le dépasser? Au prix de quelle complexité calculatoire? Ces à ces questions que nous cherchons de répondre maintenant. Pour ce faire, nous présentons tout d'abord ces méthodes d'égalisation et de décodage conjoints.

3.3 Problème de l'égalisation et du décodage conjoints

Considérons la chaîne de transmission (cf. Figure 3.2) composée d'un codeur, d'un entrelaceur et d'un canal modélisé selon (2.5). Considérons un bloc de données et notons respectivement $\{a_m\}$, $\{c_m\}$, $\{d_n\}$ et $\{r_n\}$ les séquences de bits d'information, de bits codés, de symboles émis et d'échantillons reçus.

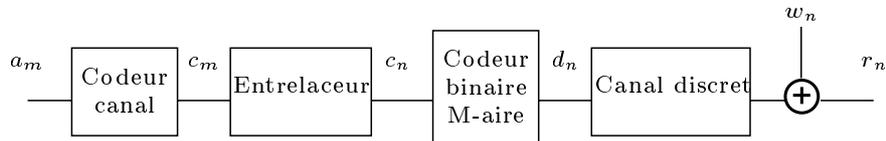


FIG. 3.2 – Chaîne de communication.

Fort de ces notations, nous pouvons maintenant définir le problème de l'égalisation et du décodage conjoints.

Définition :

Résoudre le problème de l'égalisation et du décodage conjoints, c'est trouver la séquence de bits d'information $\{a_m\}$ la plus probable, connaissant la séquence des échantillons reçus $\{r_n\}$, *i.e.* la séquence $\{a_m\}$ qui maximise la probabilité *a posteriori*:

$$P(\{a_m\}|\{r_n\}) = \frac{P(\{a_m\})}{P(\{r_n\})}P(\{r_n\}|\{a_m\}).$$

3.3.1 Solution optimale

Une solution jointe optimale est proposée lorsque l'émetteur ne contient pas d'entrelaceur. Dans ce cas, les treillis des égaliseur et décodeur constituent un « super-treillis », comme le propose par exemple [52] (ici le décodeur correspond à la modulation codée en treillis et non à un code convolutif). La même estimation des bits d'information a_m au sens du MAP est obtenue par des chaînes de Markov cachées dans [53] et ce avec une moindre complexité. Cependant, dans notre contexte de travail, nous considérons un entrelaceur dans l'émetteur, ce qui n'est pas le cas de ces méthodes.

La solution optimale à ce problème est de forte complexité notamment dans le cas, où l'émetteur est composé d'un codeur et d'un entrelaceur et que le canal de transmission est dispersif. Les entrelaceurs sont, pour être efficaces, de grande taille et l'ordre de grandeur de la complexité est alors exponentiel en la taille de l'entrelaceur.

3.3.2 Solutions sous-optimales

De par la trop grande complexité du récepteur optimal, de nombreuses approches sous-optimales ont été développées. Ainsi, la solution disjointe optimale au sens du MAP est proposée dans [40] *i.e.* un égaliseur à maximum *a posteriori*, suivi d'un désentrelaceur et d'un décodeur de Viterbi (à entrée pondérée). Dans cette chaîne de réception disjointe, l'égaliseur peut être obtenu à partir de chaînes de Markov cachées [70] ou par des solutions sous-optimales comme l'algorithme de Viterbi à sortie pondérée [41] ou l'algorithme M de réduction du treillis [50]. Ces solutions sont intéressantes car elles calculent, pour l'approche disjointe, la pondération à affecter aux données en sortie de l'égaliseur et donnant les meilleures performances. Cependant, ces méthodes n'intègrent pas le décodage dans l'égaliseur et restent de ce fait sous-optimales.

D'autres méthodes sous-optimales considèrent, quant à elle, un entrelaceur et incluent directement dans l'égaliseur le décodage. Ces méthodes sont dérivées de l'égaliseur classique DFE présenté Section 2.3.2.2 et le décodage peut être celui d'un code convolutif comme présenté dans la section 1.3 ou d'une modulation codée en treillis. Ainsi, [22] propose une première

structure, où le décodeur est placé dans la boucle retour du DFE. Rappelons ici que entrelaceur et décodeur de Viterbi (algorithme présenté pour l'égalisation Section 2.3.1.1) ajoutent un délai supplémentaire. En revanche, la boucle de retour du DFE conventionnel (cf. Section 2.3.2.2) agit sans délai. Aussi, [22] considère plutôt que le DFE conventionnel, le DFE avec prédiction de bruit [8, 58] de manière à avoir un délai plus grand dans la boucle retour. Notons que l'entrelaceur est contraint à une structure particulière : il doit être périodique. Cet algorithme est alors amélioré dans [80], où deux étages identiques au précédent sont concaténés en série. La sortie du premier étage est utilisée pour adapter les coefficients des filtres du second étage. [77] propose une nouvelle amélioration et utilise un désentrelaceur vectoriel, ce qui permet d'adapter les coefficients des filtres avec des données pondérées et non décidées comme dans la structure originelle [22].

Enfin, [2] propose une autre manière de contourner la difficulté du retard à décision inhérent au décodeur de Viterbi et propose également de pondérer les données retournées. Pour ce faire, l'interférence correspondant aux premiers coefficients de la réponse impulsionnelle (pas de délai) est annulée par le retour d'un DFE classique, mais où la fonction de décision est une sigmoïde de manière à pondérer les symboles. Puis, le reste de l'interférence (après délai nécessaire à la décision dans le décodeur) est annulée grâce à la sortie du décodeur. Ce système permet de réduire le phénomène de propagation d'erreur inhérent au DFE, car une partie des symboles (fin de la réponse impulsionnelle) sont plus fiables car décodés (puis recodés). Notons que dans cette structure, il n'y a pas d'entrelaceur.

Enfin, [20] et les travaux de la thèse de Didier [18] proposent une toute nouvelle structure, que nous appelons *Turbo-détecteur* (plutôt que Turbo-égaliseur) et qui associe un égaliseur et un décodeur de Viterbi à entrée et sortie pondérées. De plus, la structure est itérative ce qui permet de régler les problèmes des retards dus à l'entrelaceur et au décodeur. Une autre structure moins complexe est ensuite proposée par Laot [29, 43], où l'égaliseur est à base de filtres.

Notons que ces deux structures Turbo contiennent certaines des idées des méthodes sous-optimales jointes précédentes [22, 80, 77, 2] mais l'interaction entre égalisation et décodage est ici plus forte. En effet, comme dans [80], il y a plusieurs étages, mais les sorties des étages précédents ne servent pas seulement à adapter les coefficients des filtres mais alimentent directement l'étage suivant. De plus, grâce à la structure itérative, l'égaliseur dispose d'une information sur la séquence entière après décodage (et re-codage), soit une information fiable sur les symboles passés et futurs du symbole courant.

Aussi, les méthodes Turbo en tant que solution du problème de l'égalisation et du décodage conjoints nous semblent très prometteuses et nous nous proposons maintenant de les étudier plus avant.

3.4 Méthodes Turbo

Le maintenant célèbre principe « Turbo » a été tout d'abord proposé dans le cas du décodage itératif pour des codes concaténés en parallèle (Turbo codes [10]) puis pour des codes concaténés en série (Turbo codes produit [57]). Nous pouvons dès lors proposer une définition plus générale du principe Turbo à partir de la définition des Turbo-codes de Berrou [13, renvoi 1] :

Définition :

Une technique de réception « Turbo » est une structure itérative, où les données sont traitées de manière pondérée, par au moins deux algorithmes qui agissent « différemment ».

Précisons le sens d'agir « différemment ». La différence peut provenir du fait que les algorithmes fournissent des données de natures différentes, comme dans le cas de l'estimation et de l'égalisation conjointe [37]. Si en revanche, les algorithmes traitent les mêmes données et fournissent des estimations sur les mêmes données, il est important de décorréler ces données d'un traitement à l'autre (cas des Turbo-codes ou de l'égalisation et du décodage conjoints). La différence provient dans ce cas de l'utilisation d'un entrelaceur (Π) entre les deux traitements T_1 et T_2 , comme le montrent les Figures 3.3 et 3.4.

Ainsi, l'émetteur peut être parallèle ou série (cf. Figure 3.3).

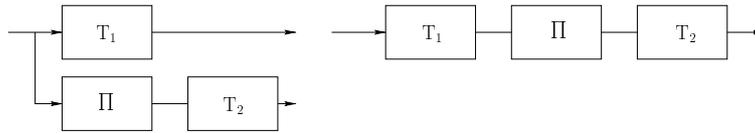


FIG. 3.3 – *Principe Turbo : émetteur parallèle ou série*

Quant au récepteur, il devient :

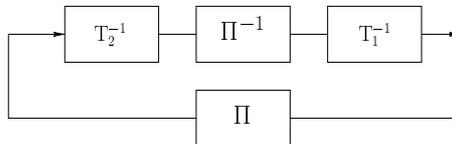


FIG. 3.4 – *Principe Turbo : récepteur*

Le Turbo-récepteur est donc un traitement itératif, où le résultat de l'itération $p-1$ est utilisé à l'itération p suivante. A ce récepteur correspond donc un schéma modulaire présenté Figure 3.5 :

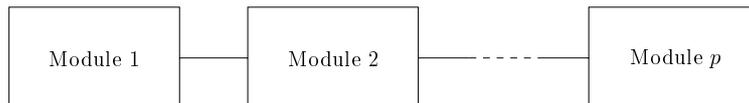


FIG. 3.5 – *Principe itératif du Turbo-égaliseur*

Fort de cette définition, le principe Turbo peut résoudre de nombreux problèmes, comme le propose Hagenauer [35], et notamment le problème de l'égalisation et du décodage conjoints.

Le « Turbo-détecteur » [18] est un récepteur itératif directement dérivé des Turbo-codes et composé de modules élémentaires correspondant aux différentes itérations. Chaque module comprend un égaliseur et un décodeur à entrée et sortie pondérées. Comme dans le cas des Turbo-codes, le décodeur fournit une information extrinsèque qui alimente, avec les échantillons reçus du canal, l'itération suivante. L'algorithme utilisé pour l'égaliseur comme pour le décodeur peut être l'algorithme de Viterbi à entrée pondérée [20] ou l'algorithme MAP symbole [6] ou toute version sous-optimale de celui-ci. [7] compare ces différents algorithmes dans le cadre de la Turbo-détection et montre que le meilleur choix, lorsque le canal est estimé, est l'algorithme sous-optimal du MAP symbole appelé Max-Log-MAP [66].

Néanmoins, malgré les approches sous-optimales à complexité réduite de l'algorithme MAP, le Turbo-détecteur présente encore une grande complexité, qui n'est pas maîtrisée du fait que le canal est en général inconnu. Aussi, nous préférons ici des solutions moins complexes. Nous

nous intéressons en particulier au Turbo-égaliseur proposé par Laot [43], où l'égalisation est réalisée avec des filtres de mise en œuvre peu coûteuse.

3.5 Turbo-égalisation : principe

Nous nous proposons maintenant de présenter plus avant les principales caractéristiques du Turbo-égaliseur. Pour ce faire, nous notons en minuscule les variables scalaires, tandis que les séquences de variables sont notées entre accolades. De plus, les symboles $(.)^T$, $(.)^\dagger$ et $\|.\|$ représentent respectivement la transposition, la trans-conjugaison et la norme L_2 . Toutes les variables ont des indices n , qui font référence au temps et des exposants p relatifs à l'itération du système Turbo.

Le module de la $p^{\text{ième}}$ itération (cf. Figure 3.6) est constitué d'un égaliseur, d'un désentrelaceur, d'un décodeur à partir duquel on calcule d_n^p une information pondérée sur les symboles d_n . C'est cette information qui est réinjectée dans l'égaliseur (de la $p+1^{\text{ième}}$ itération) avec celle sortant du canal. Ainsi, l'égaliseur bénéficie de données corrigées par le décodeur, dont le rapport signal à bruit (RSB) est plus fort.

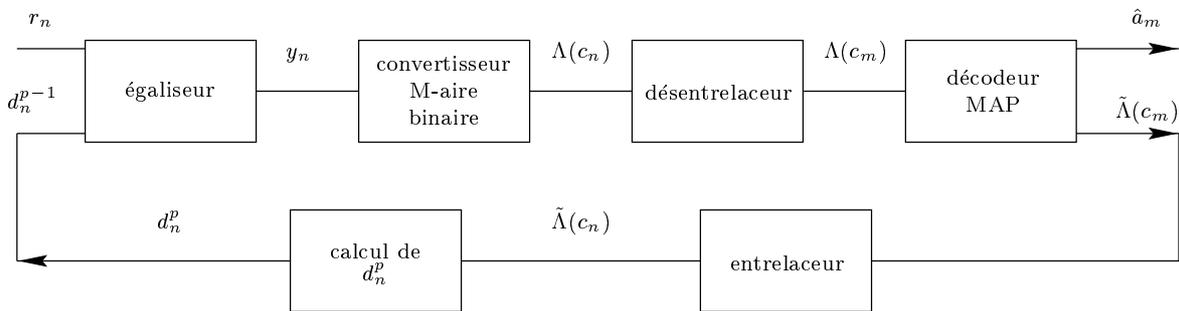


FIG. 3.6 – $p^{\text{ième}}$ module du Turbo-égaliseur

Notons que [43] présente un Turbo-égaliseur avec un entrelaceur symbole alors que nous considérons ici un entrelaceur bit, de manière à être conforme aux normes actuelles (GSM,...). Dans la suite, nous nous proposons d'étudier chacun des éléments constituant ce Turbo-égaliseur.

3.5.1 Description de l'égaliseur

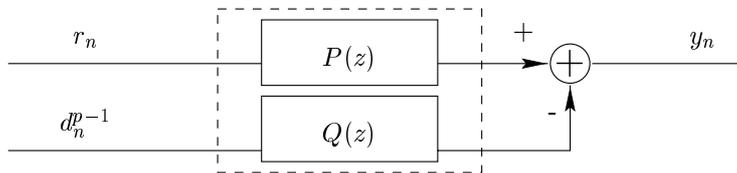


FIG. 3.7 – Egaliseur de la $p^{\text{ième}}$ itération ($p > 1$): annuleur d'interférences

L'égaliseur utilisé est l'annuleur d'interférences (AI) de mise en œuvre peu coûteuse. C'est un égaliseur à 2 entrées, qui tient à la fois compte de la transmission sur canal dispersif et bruité (r_n : sortie du canal discret) et de la redondance apportée par le codeur de canal, issue de l'itération $p - 1$ (d_n^{p-1} , information homogène aux symboles d_n). Il est à noter qu'à la première

itération, d_n^0 n'étant pas accessible, le premier égaliseur est un égaliseur classique, qui n'utilise pas les données issues du décodeur et traite uniquement les échantillons reçus. Laot propose un égaliseur linéaire transverse [43] mais nous préférons un DFE. En effet, suite à notre analyse du Turbo-égaliseur (cf. Sections 3.6.3 et 3.6.4), l'égaliseur de la première itération détermine les performances du Turbo-égaliseur et doit être le meilleur possible. Aussi, nous choisissons un DFE et plus particulièrement la réécriture du DFE classique [8] proposée dans [54].

Les expressions des filtres $P(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} p_i z^{-i}$ et $Q(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} q_i z^{-i}$ s'obtiennent en minimisant l'erreur quadratique moyenne de l'AI : $E[|r_n - d_n|^2]$ en supposant que les symboles retournés sont exacts (*i.e.* $d_n^p = d_n$) et avec la contrainte $q_0 = 0$. Cette dernière contrainte permet d'éviter que la minimisation fournisse $Q(z) = 1$ et $P(z) = 0$ *i.e.* qu'il n'y ait aucun traitement. Cette contrainte permet d'éliminer la contribution relative au symbole courant par le décodeur. Ainsi, l'information fournie par le décodeur n'alimente pas le décodeur de l'itération suivante, ce qui s'interprète de manière similaire à l'information extrinsèque. Si $H(z)$ représente la fonction de transfert du canal discret équivalent, P et Q s'écrivent [43]:

$$P(z) = \alpha H^*(z^{-1*}) \text{ et } Q(z) = \alpha \left(H(z) H^*(z^{-1*}) - \gamma_h(0) \right), \quad (3.1)$$

avec $H(z) = \sum_i h_i z^{-i}$ et $H^*(z^{-1*}) = \left(\sum_i h_i^* z^i \right)$. L'autocorrélation du canal est notée :

$$\Gamma_h(z) = H(z) H^*(z^{-1*}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \gamma_h(i) z^{-i}$$

Notre expression de α :

$$\alpha = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_d^2 \gamma_h(0) + \sigma_w^2}$$

est plus générale que celle de [43] où le canal est supposé normalisé *i.e.* $\gamma_h(0) = 1$. Les puissances des symboles d_n et du bruit w_n sont respectivement notées σ_d^2 et σ_w^2 .

On remarque, que P n'est autre que le filtre adapté au canal et maximise ainsi le rapport signal à bruit en sortie du filtre. Q est l'autocorrélation du canal dont on aurait supprimé le terme central et permet donc d'éliminer aussi bien les interférences dues aux symboles passés que futurs, et toute l'interférence entre symboles est supprimée à condition que les symboles futurs et passés soient exacts. En effet, si l'AI est alimenté par les vrais symboles d_n , les expressions (3.1) des filtres P et Q donnent en sortie :

$$y_n = \alpha \gamma_h(0) d_n + \alpha h_{-n}^* * w_n. \quad (3.2)$$

D'après (3.2), l'interférence entre symboles a été complètement supprimée et le rapport signal à bruit (RSB) en sortie de l'annuleur vaut :

$$RSB = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_w^2}.$$

C'est donc le rapport signal à bruit de la transmission sur canal à bruit additif gaussien non dispersif, où la puissance reçue du signal utile est σ_d^2 . Les performances de l'annuleur interférences avec l'hypothèse de données retournées exactes sont donc celles de la transmission BABG, comme le montre la Figure 3.8.

En revanche le bruit $\alpha h_{-n}^* * w_n$ est coloré, ce qui doit altérer les performances après décodage. Grâce à la présence du désentrelaceur, le bruit est quasiment décorréolé (*i.e.* blanchi car le bruit

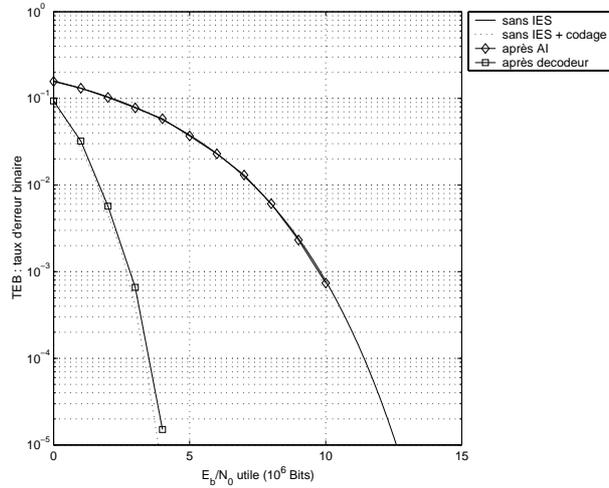


FIG. 3.8 – Performances de l'annuleur d'interférences avec symboles de retour exacts.

est gaussien) et les performances après décodage sont bien celles d'une transmission codée sur canal non dispersif (cf. Figure 3.8). On atteint donc le gain de codage attendu et ce quelque soit la dispersion du canal.

Ce résultat présente les performances de l'annuleur d'interférences, lorsque les symboles de retour sont exacts. Ceci montre la supériorité de cet égaliseur vis-à-vis du DFE qui, dans les mêmes conditions, n'atteint pas les performances du canal additif gaussien. Ceci s'explique par le fait que l'annuleur supprime non seulement les interférences passées mais aussi futures. De ce fait, l'AI sera encore plus sensible au phénomène de propagation d'erreur que le DFE.

En pratique, les symboles retournés ne sont pas exacts : $d_n^{p-1} \neq d_n$ et nous verrons la dégradation que cela engendre sur les performances.

3.5.2 Convertisseur M-aire binaire

Le convertisseur M-aire binaire permet, à partir de la sortie y_n de l'AI, de calculer une mesure $\Lambda(d_n)$ de fiabilité de la donnée égalisée, qui est alors transformée en une mesure relative aux bits c_n et notée $\Lambda(c_n)$. Calculons tout d'abord $\Lambda(d_n)$.

Lorsque l'AI est alimenté par r_n et d_n^{p-1} , nous supposons que la distribution de la sortie de l'AI est gaussienne, *i.e.* la sortie y_n contient la contribution du symbole d'intérêt et d'un bruit gaussien indépendant des symboles utiles :

$$y_n = \beta d_n + \xi_n,$$

où la variable complexe β provient de l'erreur entre d_n et d_n^{p-1} et où le bruit ξ_n sera supposé gaussien et blanc. Notons que dans le cas optimal, où les symboles retournés sont exacts (3.2), l'hypothèse de blancheur de ξ est fautive. En effet, d'après (3.2) le bruit a pour autocorrélation l'autocorrélation du canal. Dès lors, apparaît l'avantage de considérer un entrelaceur symbole, comme [43]. En effet, dans ce cas nous pouvons considérer le bruit ξ après désentrelacement comme quasi blanc. Ici, en revanche l'hypothèse de blancheur sera partiellement fautive. Cependant, puisque nous considérons dans toute la suite une modulation binaire (BPSK), cela n'a donc ici pas d'influence sur les performances.

Le passage des symboles M-aire d_n aux bits c_n dépend de la modulation choisie. Dans le cas

d'une modulation de phase à deux états (BPSK) :

$$\Lambda(d_n) = \ln \left(\frac{\mathcal{P}(y_n | d_n = 1)}{\mathcal{P}(y_n | d_n = -1)} \right) = \ln \left(\frac{\mathcal{P}(y_n | c_n = 1)}{\mathcal{P}(y_n | c_n = 0)} \right) = \Lambda(c_n)$$

Le rapport de log-vraisemblance $\Lambda(c_n)$ porte ainsi une information de fiabilité de la donnée égalisée y_n , homogène aux bits codés, entrelacés. Il s'obtient à partir de y_n par :

$$\begin{aligned} \Lambda(c_n) = \Lambda(d_n) &= \ln \left(\frac{\mathcal{P}(y_n | d_n = 1)}{\mathcal{P}(y_n | d_n = -1)} \right) = \ln \left(\frac{\exp^{-\frac{1}{\sigma_\xi^2} |y_n - \beta|^2}}{\exp^{-\frac{1}{\sigma_\xi^2} |y_n + \beta|^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{\sigma_\xi^2} \cdot (|y_n - \beta|^2 - |y_n + \beta|^2) = \frac{4}{\sigma_\xi^2} \cdot \Re(\beta^* y_n) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où σ_ξ^2 est la puissance du bruit complexe ξ_n et où $\Re(\cdot)$ représente la partie réelle. Notons que [54] montre que $\Lambda(c_n)$ peut être estimée à partir de la seule puissance d'erreur $P_e = E[|y_n - d_n|^2]$ (et non de la puissance de bruit σ_ξ^2 et du coefficient β comme dans (3.3)) par

$$\Lambda(c_n) = \frac{4}{\sigma_\xi^2} \cdot \Re(\beta^* y_n) = \frac{4}{P_e} \cdot \Re(y_n)$$

Cette puissance d'erreur P_e est estimée en sortie de l'AI :

$$\widehat{P}_e \approx E[|y_n - \hat{d}_n|^2].$$

3.5.3 Description du désentrelaceur

Rappelons que la présence de l'entrelaceur est indispensable au décodeur, pour que ce dernier apporte le gain de codage escompté (cf. Section 1.6).

Il existe de nombreux types d'entrelaceur et nous en envisageons deux différents dans les simulations. Le premier réalise un entrelacement dit *uniforme* : les bits codés c_m (cf. Figure 3.2) sont écrits ligne par ligne dans une matrice de taille 59×59 (ici) et lus colonne par colonne. Les performances du Turbo-égaliseur avec un tel entrelaceur sont présentées Figures 3.10 et 3.11.

L'autre type d'entrelacement est dit *non-uniforme* : les bits codés sont écrits ligne par ligne dans une matrice de taille 64×64 (ici) et lus selon une loi non-uniforme (cf. [43] et [18]). L'entrelaceur non-uniforme assure un mélange pseudo-aléatoire des données, ce qui permet au bruit des données d'être moins coloré. Aussi, les performances dans le cas non-uniforme sont meilleures que dans le cas uniforme, comme le montre les Figures 3.12 et 3.13 à comparer avec les Figures 3.10 et 3.11. On remarque que si l'entrelacement est effectué sur les bits codés c_m (pour obtenir c_n), le désentrelacement est quant à lui effectué sur les rapports de vraisemblance $\Lambda(c_n)$ (3.3) pour obtenir $\Lambda(c_m)$.

3.5.4 Description du décodeur

Le décodeur utilisé ici est l'algorithme MAP proposé par Bahl *et al.* [3]. Néanmoins, pour pouvoir s'intégrer dans le récepteur Turbo, ce décodeur présente cependant la particularité de devoir fournir non seulement une information pondérée sur les bits d'information mais également sur les bits codés. Détaillons maintenant les différentes sorties d'intérêt de ce décodeur.

Il fournit l'estimation \hat{a}_m des bits d'information en maximisant leurs probabilités *a posteriori*:

$$\hat{a}_m = \arg \max_{i \in \{0,1\}} \mathcal{P}(a_m = i | \{y_n\}).$$

Pour chaque itération p du Turbo-égaliseur, on peut alors calculer le taux d'erreur binaire (TEB) de ces estimations \hat{a}_m *i.e.* le TEB en sortie du décodeur.

Afin de poursuivre l'étude, précisons que le décodeur fournit également à sa sortie $\tilde{\Lambda}(c_m)$: le logarithme du rapport de probabilité *a posteriori* de chaque bit codé. Il s'agit d'une information pondérée sur les bits codés, qui est transmise au traitement suivant du Turbo-égaliseur.

$$\tilde{\Lambda}(c_m) = \ln \left(\frac{\mathcal{P}(c_m = 1 | \{y_n\})}{\mathcal{P}(c_m = 0 | \{y_n\})} \right) \quad (3.4)$$

Le calcul de $\tilde{\Lambda}(c_m)$ nécessite la connaissance des probabilités $\mathcal{P}(c_m = 1 | \{y_n\})$ et $\mathcal{P}(c_m = 0 | \{y_n\})$, dont nous détaillons les étapes de calcul ci-dessous. Le but d'un algorithme MAP est de fournir les probabilités *a posteriori* des bits utiles $\mathcal{P}(a_m = i | \{y_n\})$. Pour ce faire, il faut préalablement calculer les probabilités *a posteriori* de transition d'un état $\sigma_l = i$ du treillis à l'instant l vers un autre état $\sigma_{l+1} = j$ à l'instant $l + 1$. Notons $\mathcal{P}(\sigma_l = i, \sigma_{l+1} = j | \{y_n\})$ cette probabilité. Dès lors, on déduit la probabilité *a posteriori* d'avoir un mot codé. En effet, notons $m_l(i, j)$ le mot codé généré à l'instant l lors de la transition entre les états i et j . La probabilité *a posteriori* d'avoir émis le mot codé m à l'instant l s'écrit :

$$\mathcal{P}(m_l = m | \{y_n\}) = \sum_{i,j / m_l(i,j)=m} \mathcal{P}(\sigma_l = i, \sigma_{l+1} = j | \{y_n\})$$

Il est alors aisé d'obtenir la probabilité *a posteriori* de chaque bit du mot codé. Dans le cas d'un code convolutif de redondance $R_c = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(c_{2l} = 0 | \{y_n\}) &= \mathcal{P}(m_l = [0, 0] | \{y_n\}) + \mathcal{P}(m_l = [0, 1] | \{y_n\}) \\ \mathcal{P}(c_{2l} = 1 | \{y_n\}) &= \mathcal{P}(m_l = [1, 0] | \{y_n\}) + \mathcal{P}(m_l = [1, 1] | \{y_n\}) \\ \mathcal{P}(c_{2l+1} = 0 | \{y_n\}) &= \mathcal{P}(m_l = [0, 0] | \{y_n\}) + \mathcal{P}(m_l = [1, 0] | \{y_n\}) \\ \mathcal{P}(c_{2l+1} = 1 | \{y_n\}) &= \mathcal{P}(m_l = [0, 1] | \{y_n\}) + \mathcal{P}(m_l = [1, 1] | \{y_n\}) \end{aligned}$$

3.5.5 Calcul de d_n^p

Après entrelacement de la séquence $\tilde{\Lambda}(c_m)$ (cf. (3.4)), on obtient $\tilde{\Lambda}(c_n)$, logarithme du rapport de probabilité *a posteriori* de chaque bit codé entrelacé. Il est alors possible de calculer d_n^p la moyenne *a posteriori* des symboles d_n . Pour une modulation de phase à deux états :

$$\begin{aligned} d_n^p &= \sum_{d(j) \in \{-1,1\}} d(j) \mathcal{P}(d_n = d(j) | \{y_n\}) = \mathcal{P}(d_n = 1 | \{y_n\}) - \mathcal{P}(d_n = -1 | \{y_n\}) \\ &= \mathcal{P}(c_n = 1 | \{y_n\}) - \mathcal{P}(c_n = 0 | \{y_n\}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

De plus, d'après la définition de $\tilde{\Lambda}(c_m)$ (3.4) et en utilisant le résultat :

$$\mathcal{P}(c_m = 1 | \{y_n\}) = \mathcal{P}(c_m = 0 | \{y_n\}),$$

nous obtenons les expressions des probabilités :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(c_m = 1|\{y_n\}) &= \frac{\exp \tilde{\Lambda}(c_n)}{\exp \tilde{\Lambda}(c_n) + 1}, \\ \mathcal{P}(c_m = 0|\{y_n\}) &= \frac{1}{\exp \tilde{\Lambda}(c_n) + 1}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons avec (3.5) :

$$d_n^p = \frac{\exp \tilde{\Lambda}(c_n) - 1}{\exp \tilde{\Lambda}(c_n) + 1} \quad (3.6)$$

C'est cette information d_n^p qui alimentera l'égaliseur de l'itération suivante. Au contraire des systèmes Turbo, où une information extrinsèque est calculée, nous alimentons l'anneur d'interférence avec la probabilité *a posteriori*. Cette information *a posteriori* est alors considérée comme *a priori* pour le module suivant.

3.5.6 Conclusion

Le schéma de Turbo-égalisation présenté permet de réduire la complexité du traitement de réception par rapport au traitement optimal conjoint en utilisant un traitement itératif.

Après avoir étudié chacun des éléments du Turbo-égaliseur, nous en présentons maintenant les performances.

3.6 Turbo-égalisation : performances et première analyse

3.6.1 Conditions de simulation

Nous utilisons ici un Turbo-égaliseur comprenant :

- codeur : convolutif et récursif systématique, de rendement $\frac{1}{2}$, de longueur de contrainte $K = 7$ et de polynômes $[1, \frac{171}{133}]$,
- entrelaceur binaire uniforme : les bits sont écrits ligne par ligne dans une matrice de taille 59×59 puis lus colonne par colonne,
- modulation : de phase à deux états BPSK,
- mise en forme : les symboles transmis sur le canal sont mis en forme par blocs, où chaque bloc contient 32 symboles utiles suivis de 16 symboles connus et dits d'apprentissage,
- égaliseur : DFE [54] pour l'itération 1, puis AI,
- décodeur : MAP [3].

Types de canaux testés :

Les canaux testés sont ceux présentés Section 2.4.

Quelques courbes de références : afin de juger de l'efficacité du Turbo-égaliseur, nous présentons tout d'abord les courbes de performances en sortie de l'égaliseur en fonction des itérations ($\#1, \#2, \dots$) et les comparons à 2 courbes de références :

- **BABG** : performances sur le canal à bruit additif blanc gaussien,
- **egal. opt.** : performances de l'égaliseur MAP optimal pour ce canal.

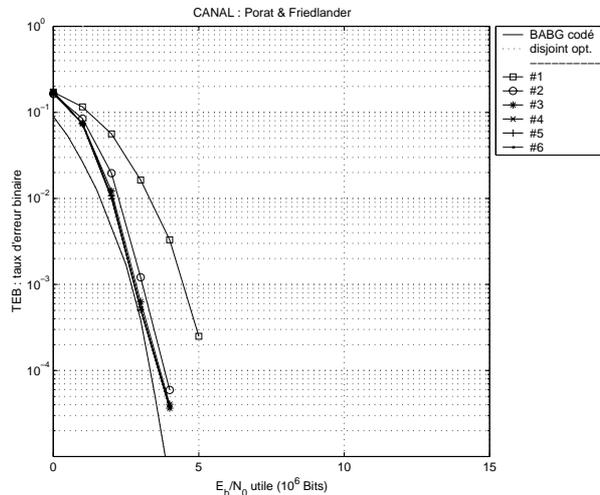


FIG. 3.9 – Performances du Turbo-égaliseur (entrelaceur uniforme et 1^{er} égaliseur: DFE) estimées en sortie du décodeur pour le canal Porat & Friedlander. Les courbes BABG codé et disjoint optimal sont ici confondues.

De même, nous représentons les courbes de performances en sortie du décodeur en fonction des itérations (#1, #2, ...) et les comparons à 2 autres courbes de références :

- **BABG codé** : performances du décodeur optimal MAP sur le canal à bruit additif blanc gaussien pour le code considéré,
- **disjoint opt.** : performances du récepteur disjoint optimal *i.e.* égaliseur MAP puis décodeur MAP pour le canal et le code considérés (le calcul de cette courbe est présenté Section 4.2.1).

Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus pour des simulations sur 10^6 bits d'information et sont présentés Figures 3.9 et 3.10.

3.6.2 Allure générale des courbes de performances

Il est intéressant de noter que pour le canal Porat & Friedlander (cf. Figure 3.9), le Turbo-égaliseur obtient les mêmes performances que le canal à bruit additif blanc gaussien *i.e.* toute l'interférence due aux autres symboles a bien été supprimée. Malgré sa sous-optimalité, le Turbo-égaliseur peut donc obtenir de bonnes performances lorsque le canal n'est pas trop difficile (canal dispersif ayant la même distance minimale que le canal à bruit additif blanc gaussien).

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons des canaux plus sévères dont la distance minimale est plus faible que celle du canal à bruit additif blanc gaussien. Ainsi, le canal Proakis B présente un exemple intéressant. Bien qu'après l'égaliseur les performances tendent vers celles du canal BABG (Figure 3.10, courbe a), les performances après décodeur restent éloignées de celles du canal BABG codé (Figure 3.10, courbe b). Afin de mieux comprendre le fonctionnement du Turbo-égaliseur, nous nous proposons de déterminer les caractéristiques des performances du Turbo-égaliseur.

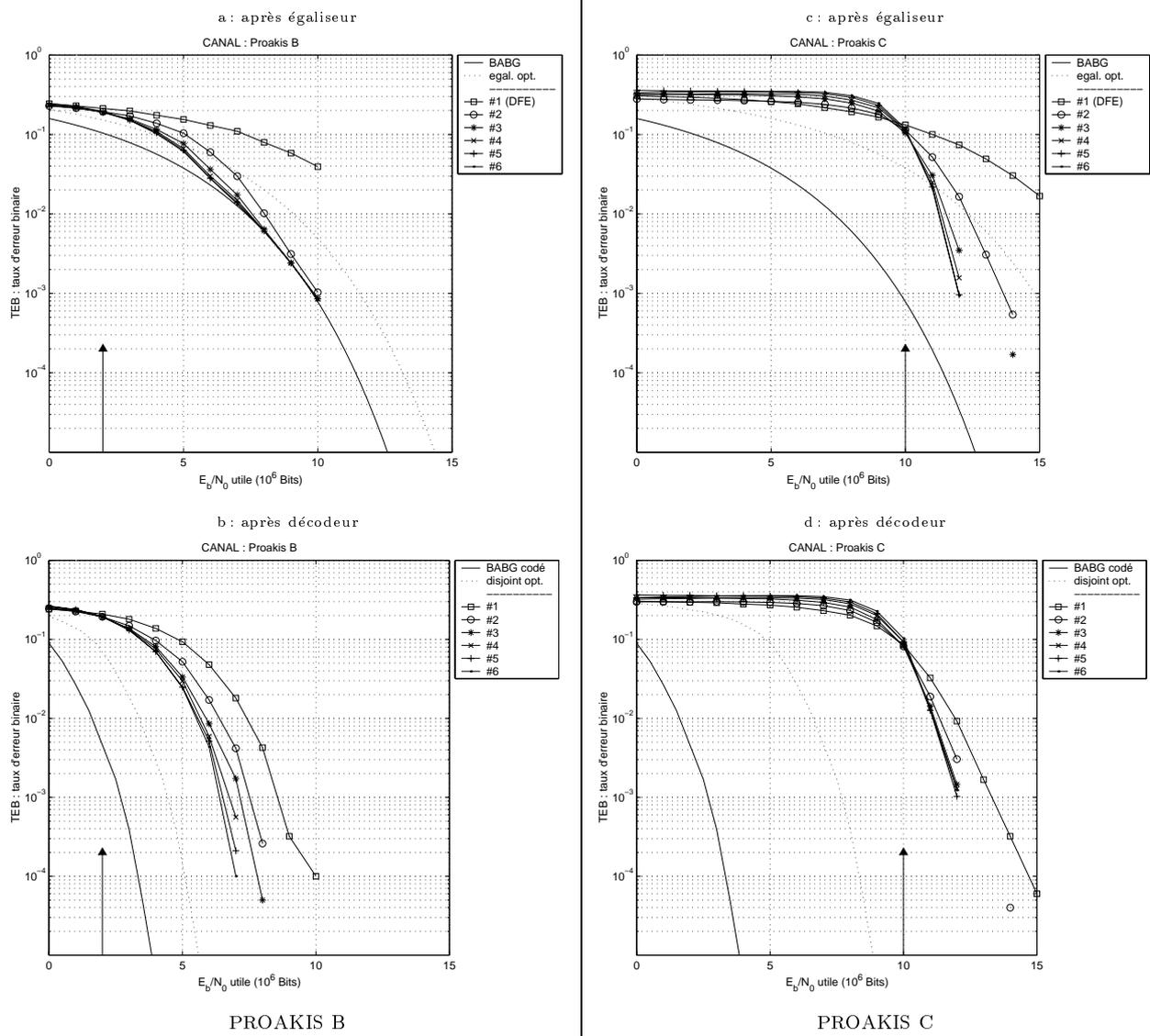


FIG. 3.10 – Performances du Turbo-égaliseur (entrelaceur uniforme et 1^{er} égaliseur : DFE).

3.6.3 Le point de déclenchement

Comme dans le cas des Turbo-codes, les simulations ont mis en évidence l'existence d'un *point de déclenchement* du phénomène Turbo. En effet, nous avons remarqué que les itérations successives apportent une amélioration si le TEB est suffisamment faible après la première itération.

La Figure 3.10 présente le TEB du Turbo-égaliseur évalué soit après l'égaliseur (a et c), soit après le décodeur (b et d) et ce en fonction de l'itération. Pour comparer, nous avons présenté les performances du canal BABG (a et c) et celles du canal BABG codé (b et d). Nous remarquons que, pour les deux canaux, les performances du Turbo-égaliseur s'améliorent au fil des itérations lorsque le TEB après l'égaliseur de la première itération est inférieur à 0.2. C'est donc cette valeur de TEB qui permet le déclenchement du phénomène Turbo.

De plus, nous observons que le canal agit sur l'abscisse de ce point. En effet, le déclenchement s'opère à un rapport signal à bruit ($\frac{E_b}{N_0}$) de 2 dB pour le canal Proakis B (a) et de 10 dB pour le Proakis C (c). Ainsi, pour le canal Proakis C réputé plus difficile que le Proakis B, le phénomène

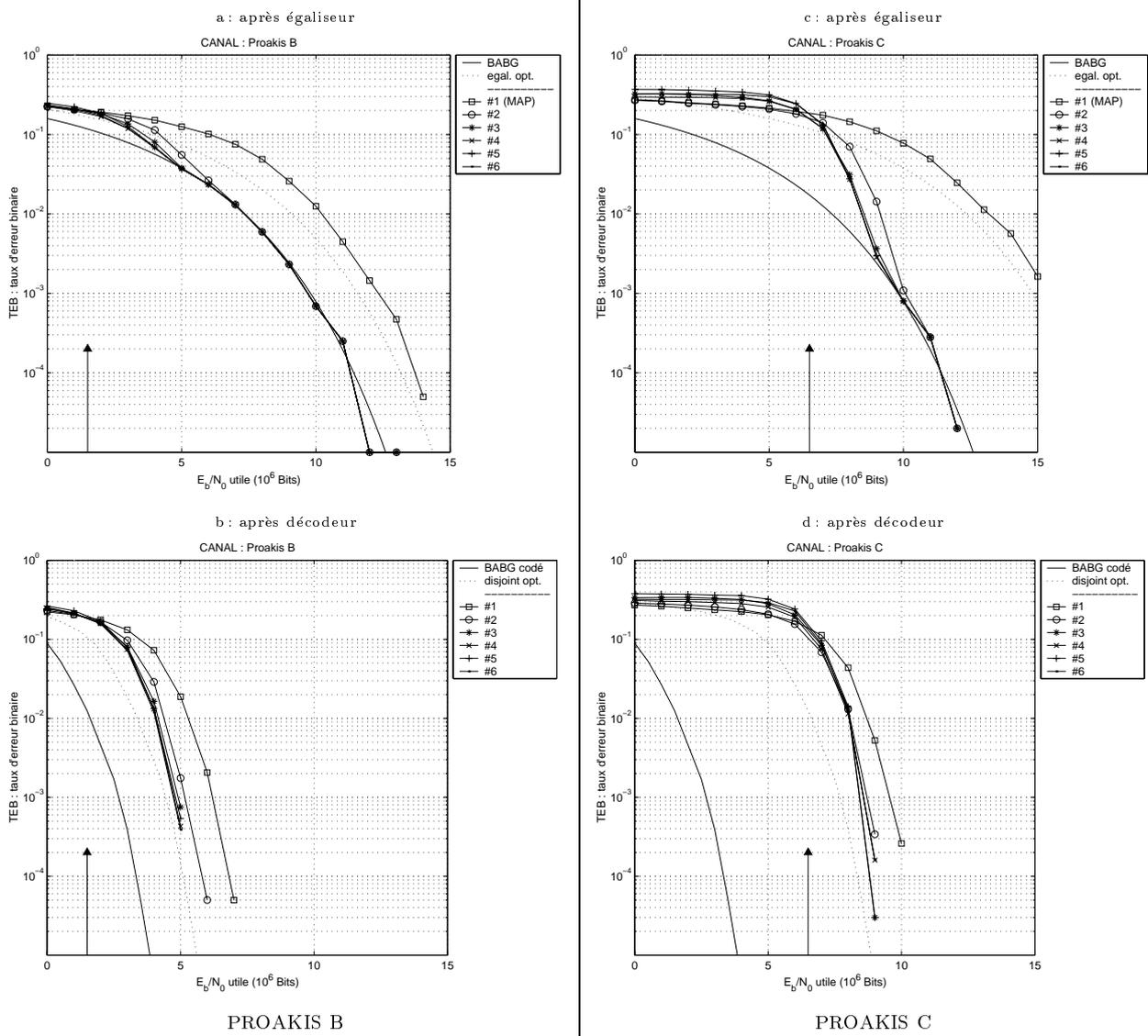


FIG. 3.11 – Performances du Turbo-égaliseur (entrelaceur uniforme et 1^{er} égaliseur : MAP).

Turbo s'enclenche pour un rapport $\frac{E_b}{N_0}$ plus fort, ce qui montre l'effet du canal sur ce point de déclenchement.

Comme le point de déclenchement est le point à partir duquel le phénomène Turbo s'enclenche, il nous paraît intéressant de montrer maintenant l'influence de certains paramètres sur l'abscisse de ce point. En effet, plus le déclenchement a lieu pour un RSB faible, meilleures seront les performances asymptotiques du Turbo-égaliseur (*i.e.* lorsque le nombre d'itération augmente). Ainsi, trouver des paramètres, qui permettent d'avancer le point, permet d'améliorer la structure actuelle du Turbo-égaliseur.

Il est ainsi apparu que le tout premier traitement (*i.e.* l'égaliseur de la première itération) est primordial et que les performances de cet égaliseur influent directement sur le déclenchement ou non du phénomène Turbo. Ceci est illustré Figure 3.11 en plaçant un égaliseur MAP en début de chaîne au lieu d'un égaliseur DFE. Il est à noter que cette modification ne change pas le TEB du point, ce qui continue à corroborer la thèse selon laquelle le point de déclenchement est lié au TEB après le premier égaliseur. En revanche, l'utilisation d'un égaliseur MAP en première itération, permet pour le canal Proakis C de ramener le point de déclenchement à une

abscisse de 6.5 dB au lieu de 10 et de 1.5 au lieu de 2 dB pour le Proakis B.

Nous avons également étudié l'influence de l'entrelaceur. Pour ce faire, nous avons choisi un entrelaceur de taille 64×64 , où les données sont lues selon une loi non-uniforme précisée dans [43]. Sur le tableau 3.1, on voit que la nature du premier égaliseur affecte plus le point de déclenchement que l'entrelaceur.

Entrelaceur	1 ^{er} égaliseur	n ^o de la Figure	Proakis B	Proakis C
uniforme	DFE	3.10	2 dB	10 dB
non-uniforme	DFE	3.12	2 dB	9.4 dB
uniforme	MAP	3.11	1.5 dB	6.5 dB
non-uniforme	MAP	3.13	1.5 dB	6 dB

TAB. 3.1 – Abscisse des points de déclenchement pour les canaux Proakis B et C.

Ces premiers résultats laissent à penser que le point de déclenchement est primordial dans le phénomène Turbo, car plus il a lieu pour un faible RSB, meilleures seront les performances asymptotiques du Turbo-égaliseur (*i.e.* lorsque le nombre d'itération augmente). Pour l'améliorer, il faut prendre le meilleur égaliseur possible *i.e.* l'égaliseur MAP, sauf si le treillis compte trop d'états auquel cas nous utiliserons l'égaliseur DFE. Notons, que dans le cas de canaux faciles, où tous les égaliseurs donnent des performances proches, nous choisirons le moins complexe.

3.6.4 L'effet d'avalanche

Le point de déclenchement observé au-dessus, marque le début d'un *effet d'avalanche*. En effet, les courbes de performances présentent une pente de plus en plus forte après le déclenchement et au fur et à mesure des itérations, ce qui permet d'assurer les bonnes performances asymptotiques du Turbo-égaliseur. Nous allons maintenant étudier l'influence de l'entrelaceur sur cet effet.

Les performances du Turbo-égaliseur montrent que l'entrelaceur non-uniforme de taille 64×64 (Figure 3.12) donne de meilleurs résultats en sortie du décodeur que l'entrelaceur uniforme de taille 59×59 (Figure 3.10). En effet, avec l'entrelaceur non-uniforme, le gain entre chaque itération du Turbo est plus grand.

L'effet d'avalanche s'observe également en sortie de l'égaliseur (cf. Figures 3.10 et 3.11), où l'on observe l'influence du 1^{er} égaliseur. A 5 dB par exemple et pour le canal Proakis B, les performances après l'égalisation de la première itération (#1, a) sont égales, que l'égaliseur soit MAP (Fig. 3.11) ou DFE (Fig. 3.10).

En revanche, l'effet d'avalanche est plus important dans le cas du MAP. En effet, à 5 dB, les performances en sortie de l'AI sont celles du canal à bruit additif blanc gaussien dès la 3^{ième} itération avec le MAP en première itération, alors qu'elles ne sont mêmes pas atteintes à la 6^{ième} itération avec le DFE. Ceci motive, quand c'est possible, l'utilisation de l'égaliseur MAP à la première itération.

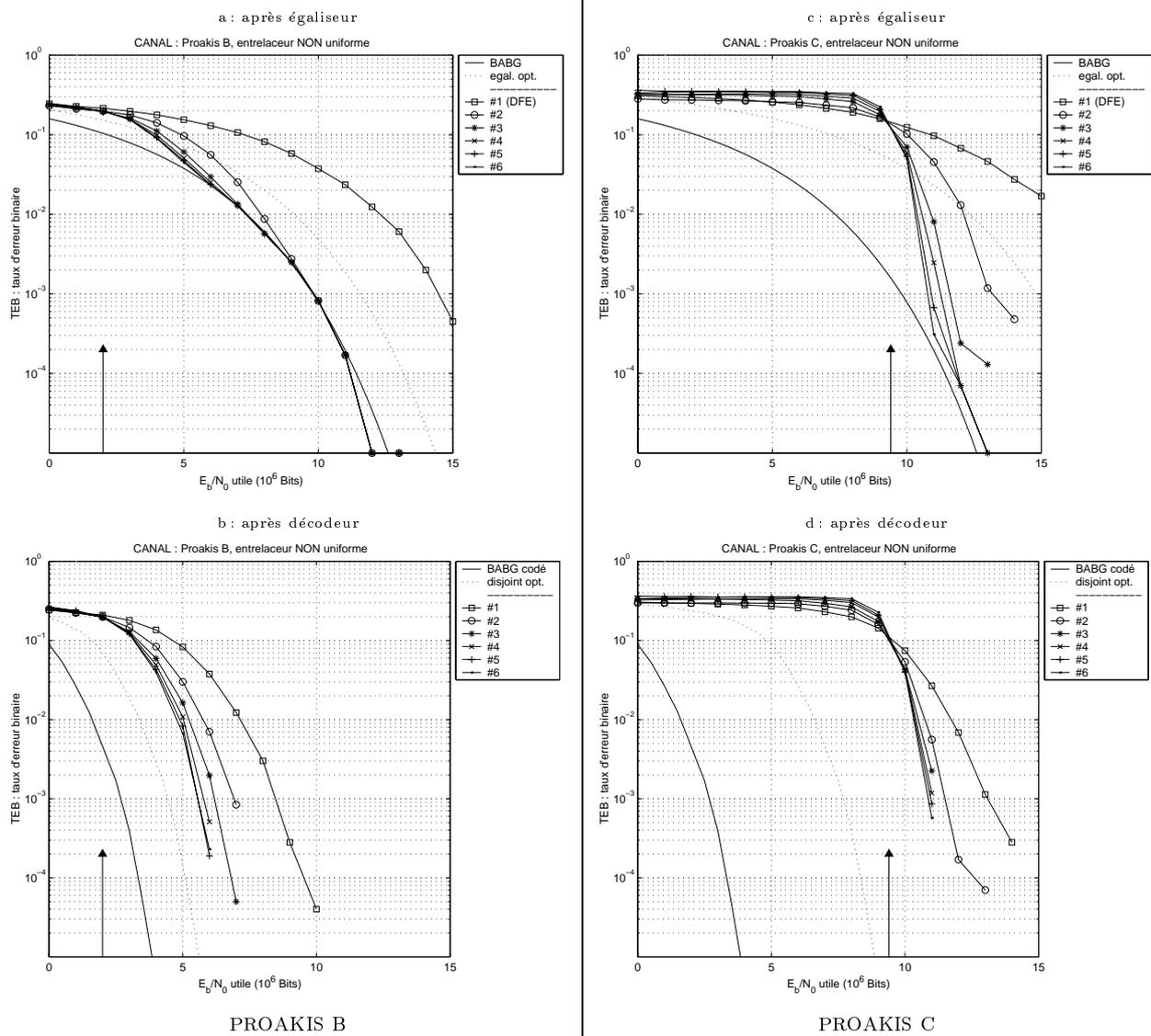


FIG. 3.12 – Performances du Turbo-égaliseur (entrelaceur non-uniforme et 1^{er} égaliseur : DFE).

3.6.5 Remarque sur la lecture des courbes

L'ajout de l'ensemble codeur/décodeur dans une chaîne de communication permet d'obtenir de meilleures performances. En ajoutant de la redondance dans le signal émis, le codeur permet d'accroître les distances (euclidiennes) entre toutes les séquences codées possibles, au prix d'une diminution du rapport signal à bruit codé (*i.e.* transmis) par rapport au RSB utile (cf. Section 1.4.1).

Dans la suite nous souhaitons pouvoir comparer les performances avec et sans codage pour un même RSB : nous choisissons arbitrairement comme référence le RSB utile. Ainsi nous représentons également les performances après égaliseur et après décodeur en fonction de ce même RSB utile. Nous proposons donc dans les Figures 3.10, 3.12, 3.11 et 3.13, une lecture verticale des courbes *i.e.* une expérience est menée pour un RSB utile donné et nous lisons l'évolution de la probabilité d'erreur tant pour l'égaliseur que pour le décodeur, d'où la lecture verticale.

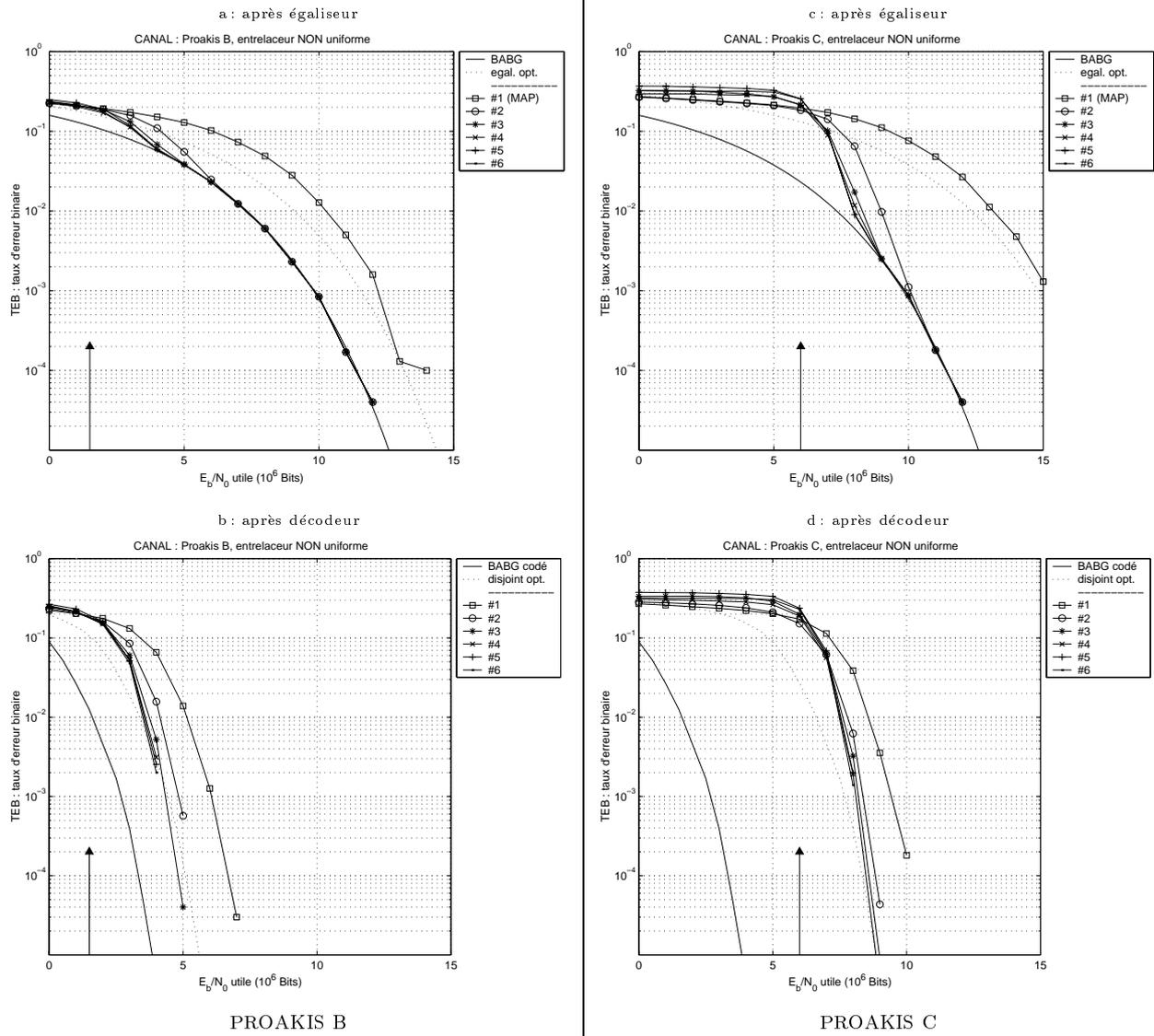


FIG. 3.13 – Performances du Turbo-égaliseur (entrelaceur non-uniforme et 1^{er} égaliseur : MAP).

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux récepteurs correspondant à l'émission d'un message codé sur canal sélectif en fréquence. Ils comportent donc un égaliseur et un décodeur. L'approche classique, dans les normes actuelles, est à ce jour encore disjointe. Nous avons rappelé les limitations inhérentes à une telle approche et avons considéré les méthodes qui permettent d'améliorer de tels récepteurs. Pour ce faire, nous nous sommes placés dans le contexte d'une approche conjointe de manière à ne pas perdre d'information entre les deux étapes d'égalisation et de décodage. La solution optimale à ce problème conjoint étant trop complexe, nous nous sommes ensuite intéressés aux solutions sous-optimales. Parmi elles, les récepteurs Turbo nous semblaient très prometteurs : ils transforment la complexité du problème conjoint en un traitement itératif. Ces récepteurs Turbo sont aujourd'hui au nombre de deux : le Turbo-détecteur utilise un égaliseur MAP, alors que le Turbo-égaliseur utilise un annuleur d'interférences à base de filtres et à la complexité de ce fait fort réduite. C'est pourquoi, nous nous sommes alors intéressés à cette seconde structure : le Turbo-égaliseur.

Après en avoir rappelé sa structure itérative et les différents éléments constituant une itération, nous avons pu présenter les performances du Turbo-égaliseur. De cette première analyse, nous avons mis en évidence la présence d'un point de déclenchement du phénomène Turbo *i.e.* un certain rapport signal à bruit de la transmission à partir duquel les performances s'améliorent au fur et à mesure des itérations. Nous avons montré que ce point de déclenchement dépend de la sélectivité du canal et qu'il est influencé par l'égaliseur de la toute première itération. Ainsi, nous pouvons conclure que l'utilisation d'un égaliseur MAP (quand c'est possible) assure de meilleures performances asymptotiques (*i.e.* lorsque le nombre d'itérations augmente) du Turbo-égaliseur.

Puis, nous avons montré qu'un effet d'avalanche fait directement suite à ce point de déclenchement. Cet effet peut être accru avec l'utilisation d'un entrelaceur, qui assure une répartition la plus aléatoire possible des erreurs issues de l'égaliseur.

Enfin, l'analyse des performances asymptotiques du Turbo-égaliseur a montré que lorsque le canal a une distance minimale proche de celle du canal BABG, il est possible d'obtenir les performances du canal BABG. En revanche, ce n'est pas le cas lorsque le canal est plus sévère. C'est ce cas difficile que nous nous proposons d'analyser dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Turbo-égalisation : analyse

4.1 Introduction

Le chapitre précédent a rappelé les caractéristiques du Turbo-égaliseur [43], solution sous-optimale au problème de l'égalisation et du décodage conjoints. Cette structure fournit pour certains canaux (cf. Figure 3.9) les performances du canal BABG. En revanche, pour des canaux aux distorsions plus sévères, il n'est pas possible de s'affranchir de toute l'interférence entre symboles apportée par le canal. C'est précisément ce cas, que nous cherchons à analyser plus avant maintenant.

Nous observons une distance entre les performances du Turbo-égaliseur et celles du décodeur sur un canal BABG. Quelles sont les causes de cette distance? Est-ce que le Turbo-égaliseur peut toujours atteindre (*i.e.* quel que soit le canal) les performances du décodeur sur canal BABG? Existe-t-il une borne plus proche tenant compte du code, de l'entrelaceur ainsi que du canal de transmission?

Toutes ces questions nous paraissent tout à fait légitimes. Aussi, nous consacrons la première partie de ce chapitre à trouver des bornes adaptées à notre problème d'égalisation et de décodage conjoints. La première borne présentée est celle du système disjoint dit optimal *i.e.* un récepteur comprenant un égaliseur MAP et un décodeur MAP ou Viterbi, qui atteindrait le gain de codage obtenu sur un canal BABG. Notons qu'en général (cf. Figure 3.1) la concaténation d'un égaliseur MAP et d'un décodeur n'atteint pas cette borne. Puis, nous présentons une deuxième borne, qui permet de prédire les performances de la solution optimale au problème d'égalisation et de décodage conjoints. Enfin, nous pourrions comparer les performances du Turbo-égaliseur avec ces bornes. Cette analyse nous permettra d'isoler la perte due uniquement au traitement sous-optimal.

Dans une seconde partie, nous présentons une analyse fonctionnelle du Turbo-égaliseur, qui permet de prédire les performances du Turbo-égaliseur avec la seule connaissance du code et du canal. Ainsi, nous verrons quelles caractéristiques des performances du Turbo-égaliseur nous pourrions prévoir, sans réaliser la simulation Turbo.

4.2 Bornes pour l'égalisation et le décodage conjoints

Cette partie concerne le calcul de bornes pour des récepteurs répondant au problème de l'égalisation et du décodage conjoints. Une première borne « classique » est celle donnée par

les performances d'un décodeur MAP sur un canal à bruit additif blanc gaussien (BABG). Nous notons cette borne ($P_{b,BABG\text{ codé}}$). Néanmoins, l'analyse de performances (cf. Section 3.6) a montré une distance importante entre les performances du Turbo-égaliseur et cette borne $P_{b,BABG\text{ codé}}$ notamment pour des canaux aux distorsions sévères. Aussi, nous souhaitons calculer maintenant de nouvelles bornes, qui tiennent compte des distorsions du canal.

Rappelons, pour ce faire, que le gain de codage (1.10) est la distance (en dB) entre les performances du canal à bruit additif gaussien et les performances asymptotiques (*i.e.* à fort RSB) du décodeur de Viterbi pour le même canal :

$$P_{b,BABG\text{ codé}} = P_{b,BABG}(\text{RSB} + \text{gain de codage}),$$

avec : $\text{gain de codage} = 10 \log_{10}(R_c d_{free}).$

La Figure 4.1 représente le gain de codage en tant que distance entre les courbes BABG et BABG codé. De même, la distance entre les performances asymptotiques de l'égaliseur de Viterbi pour un canal sélectif en fréquence et le canal à bruit additif gaussien sont données par la perte canal définie en (2.13) :

$$P_{b,Viterbi} = P_{b,BABG}(\text{RSB} - \text{perte canal}),$$

avec : $\text{perte canal} = 10 \log_{10} \left(\frac{d_{min\ BABG}^2}{d_{min\ canal}^2} \right).$

Comme précédemment, la Figure 4.1 permet de visualiser cette perte canal.

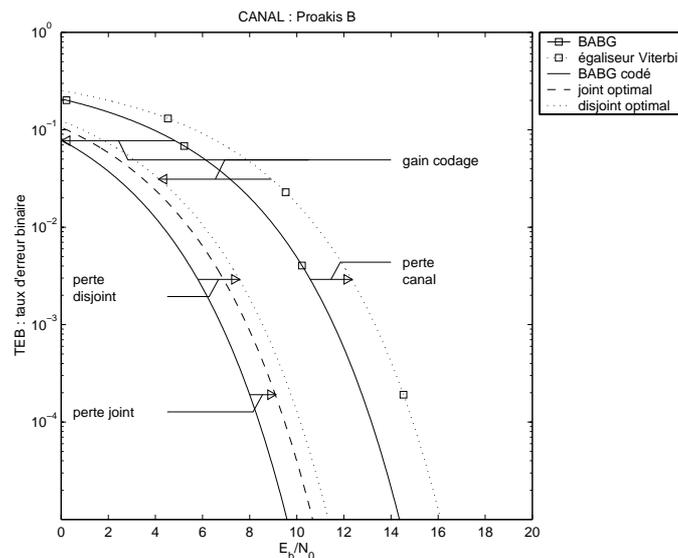


FIG. 4.1 – Calcul de bornes pour le canal Proakis B.

Définissons maintenant deux nouvelles bornes particulièrement adaptées au problème de l'égalisation et du décodage conjoints. Nous utilisons dans la suite le fait que l'algorithme de Viterbi ou MAP séquence a des performances très proches en terme de taux d'erreur binaire de celles du MAP symbole (cf. Section 2.4). Aussi, dans la suite, nous utiliserons le gain de codage et la perte canal pour caractériser les performances asymptotiques (à fort RSB) des algorithmes MAP symbole.

4.2.1 Le récepteur disjoint optimal

Nous souhaitons ici calculer les performances du système disjoint optimal. Ce récepteur est composé d'un égaliseur MAP symbole à entrée et sortie pondérées et d'un décodeur MAP symboles à entrée pondérée également. Nous supposons de plus, que le décodeur MAP atteint le gain de codage (1.10) défini pour le canal BABG. Notons que pour des canaux sélectifs en fréquence, le décodeur MAP n'atteint en général pas ce gain de codage, comme le montre la Figure 3.1. Ceci s'explique par le fait que nous approximons la sortie de l'égaliseur par un modèle de données sans interférences entre symboles plus un bruit additif gaussien. Or, pour des canaux aux distorsions sévères, il reste de l'interférence et le modèle n'est plus validé. Néanmoins, ce récepteur nous semble intéressant. En effet, nous avons conclu dans le chapitre précédent que le tout premier égaliseur détermine (parmi d'autres facteurs) les performances asymptotiques du Turbo-égaliseur et que si possible, il faut choisir l'égaliseur MAP symbole. Ainsi, la première itération du Turbo-égaliseur devient le récepteur disjoint, qui n'atteint pas le gain de codage. Il serait intéressant de savoir si les itérations suivantes du Turbo-égaliseur peu complexes (car l'égaliseur est l'annuleur d'interférences) permettent d'atteindre voire même de dépasser ce gain de codage. D'où notre récepteur disjoint optimal.

Pour ce récepteur disjoint optimal, après l'égaliseur MAP les performances asymptotiques sont :

$$P_{b,Viterbi} = P_{b,BABG}(\text{RSB} - \text{perte canal}).$$

Fait suite le décodeur MAP à entrée pondérée. Afin de simplifier le calcul de cette borne nous supposons que ce décodeur atteint le gain codage (cf. Section 1.5) et fournit donc les performances asymptotiques binaires du récepteur disjoint optimal :

$$\begin{aligned} P_{b,disjoint\ optimal}(\text{RSB}) &= P_{b,Viterbi}(\text{RSB} + \text{gain de codage}) \\ &= P_{b,BABG}(\text{RSB} + \text{gain de codage} - \text{perte canal}). \end{aligned}$$

On en déduit la perte du système disjoint optimal par rapport aux performances du décodeur MAP sur canal BABG (*i.e.* le cas BABG codé) :

$$\begin{aligned} \text{perte vis-à-vis BABG} &= \text{perte canal} - \text{gain codage} \\ \text{perte disjoint} = \text{perte vis-à-vis BABG codé} &= \text{perte canal} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow \text{à fort RSB, } P_{b,disjoint\ optimal} = P_{b,BABG\ codé}(\text{RSB} - \text{perte disjoint}) \quad (4.2)$$

Cette perte disjoint est présentée Figure 4.1. Notons que cette borne dépend des caractéristiques du code et du canal.

4.2.2 Le récepteur conjoint optimal

L'analyse de performances (cf. Section 3.6) a montré une distance importante entre les performances du Turbo-égaliseur et la borne $P_{b,BABG\ codé}$ notamment pour des canaux aux distorsions sévères. Rappelons que cette borne est en fait les performances du code sur le canal BABG et représente donc les meilleures performances possibles pour ce code. Dans cette distance nous souhaitons maintenant isoler la perte due au canal de transmission d'une part et au traitement sous-optimal du Turbo-égaliseur d'autre part.

Pour ce faire, il nous faut obtenir les performances du récepteur optimal conjoint présenté Section 3.3.1 et les comparer à celle du Turbo-égaliseur. La distance sera observée sera celle due au traitement itératif et sous-optimal.

Pour ce faire, rappelons que le récepteur conjoint optimal calcule les vraisemblances de chaque séquence de bits d'information connaissant les échantillons reçus du canal et choisit la plus probable. Ainsi, ce récepteur tient donc compte de l'ensemble du système {code+entrelaceur+canal}. La complexité d'un tel algorithme est tout à fait prohibitive. En effet, l'entrelaceur placé après le code « casse » la structure convolutive de telle sorte que l'ensemble {code+entrelaceur+canal} ne peut être représenté sous forme de treillis et qu'il n'y a donc pas de réduction de complexité comme dans le cas de l'algorithme de Viterbi (cf. Section 2.3.1.1.2). Sous hypothèse de bruit blanc gaussien, le récepteur conjoint optimal doit alors calculer les distances entre la séquence d'échantillons reçus et toutes les séquences possibles (séquences codées, entrelacées et convoluées par le canal) pour finalement choisir celle la plus proche.

De ce fait, le récepteur conjoint optimal est très proche de l'égaliseur de Viterbi. Ainsi, de la même manière que pour l'égaliseur de Viterbi, où l'on prédit les performances par rapport au canal BABG avec la distance minimale entre toutes les séquences possibles convoluées par le canal, nous pouvons aussi prédire les performances du récepteur conjoint optimal par rapport au canal BABG codé en calculant une nouvelle distance globale minimale. Notons cette distance $d_{globale\ min}$. Elle représente la distance minimale entre toutes les séquences possibles codées, entrelacées et convoluées par le canal. Avec cette nouvelle distance globale minimale, nous définissons la perte conjoint :

$$\text{perte conjoint} = 10 \log_{10} \left(\frac{d_{BABG\ codé}^2}{d_{min\ globale}^2} \right),$$

où $d_{BABG\ codé}$ est la distance minimale sur le canal BABG codé. On obtient alors :

$$\text{à fort SNR, } P_{b, joint\ optimal} = P_{b, BABG\ codé}(SNR - \text{perte conjoint}).$$

Cette perte joint ainsi que la borne obtenue pour le récepteur conjoint sont présentés Figure 4.1. Notons que cette borne fournit les performances asymptotiques du récepteur conjoint optimal et dépend des caractéristiques à la fois du code, de l'entrelaceur et du canal.

Notons que le calcul de la distance minimale globale est, comme pour le récepteur conjoint optimal, prohibitif. Aussi, afin de poursuivre notre étude, nous devons choisir un cas, où le calcul de cette distance n'est pas trop complexe. C'est cet exemple simple que nous présentons ci-dessous.

4.2.3 Choix d'un exemple simple

Pour les conditions de simulation spécifiées dans la section 3.6.1 et dans le cas de l'entrelaceur uniforme de taille 59×59 , $2^{\frac{59 \times 59}{2}}$ séquences de bits d'information sont générées et environ $2^{59 \times 59}$ distances sont calculées pour obtenir $d_{min\ globale}$. Aussi, le trop grand nombre de distance rend le calcul de $d_{min\ globale}$ impossible dans ce cas. Nous nous proposons donc de choisir un exemple plus simple (dans les Figures 4.2, 4.3, 4.4) et tout de même intéressant pour notre étude, *i.e.* où les bornes BABG codé et joint optimal ne sont pas confondues pour les canaux Proakis B et C.

Pour ce faire, nous considérons l'exemple avec pour caractéristiques :

- un code de répétition 3 *i.e.* un code de longueur de contrainte 1 et de polynômes [1 1 1],
- un entrelaceur non uniforme de taille 12, où les données sont lues MODULO 5.

Ces caractéristiques ont été obtenues grâce à l'étude de cas de la Section 2.5. En effet, pour le canal Proakis B et avec une modulation BPSK, les motifs d'erreur fournissant la distance minimale sont donnés dans le Tableau 2.6 et sont $-2\ 2\ -2\ \dots\ -2$ ou $-2\ 2\ -2\ \dots\ 2$.

Soient 4 bits d'information notés 1234. Pour notre exemple dit simple, il leur correspond la séquence de symboles émis :

$$1234 \xrightarrow{\text{codé}} 111222333444 \xrightarrow{\Pi} 124231342413 \xrightarrow{\text{mise en forme}} c \cdots c \underline{1242} c \cdots c \underline{3134} c \cdots c \underline{2413} c \cdots c$$

où Π est l'entrelaceur et $c \cdots c$ la séquence de symboles connus. Les deux séquences de symboles émis, qui donnent la distance minimale globale $d_{\min \text{ globale}}$ (relative au récepteur conjoint), sont celles, où 2 et 4 diffèrent. Ce résultat est obtenu après calcul exhaustif de toutes les distances possibles. On obtient finalement les valeurs des distances :

$$\begin{aligned} d_{BAG \text{ codé}}^2 &= d_{\text{free}} d_{\min \text{ BAG}}^2 = 12 \\ d_{\min \text{ globale}}^2 &= 2d_{\min \text{ canal}}^2 + d_{\min \text{ BAG}}^2 = 9.34 \\ d_{\text{disjoint opt}}^2 &= d_{\text{free}} d_{\min \text{ canal}}^2 = 8.01 \end{aligned}$$

Avec ces distances, nous en déduisons les pertes joint et disjoint :

CANAL	PERTE JOINT	PERTE DISJOINT
Proakis B	-1.09 dB	-1.75 dB
Proakis C	-2.01 dB	-5.01 dB

TAB. 4.1 – Pertes des récepteurs joint optimal et disjoint optimal vis-à-vis de la borne sur le canal BAG codé.

4.3 Comparaison du Turbo-égaliseur avec les bornes

Pour l'exemple précisé Section 4.2.3, nous comparons le Turbo-égaliseur avec les différentes bornes déjà introduites et que nous rappelons maintenant.

Nous considérons tout d'abord la borne dite BAG codé, correspondant à la transmission d'un message codé sur un canal BAG. En effet, nous avons montré au paragraphe 3.5.1, que lorsque l'annuleur d'interférences est alimenté par les échantillons reçus et par les vrais symboles, les performances sont celles du BAG, puis après décodage celles du BAG codé. Néanmoins, cette borne ne dépend pas des caractéristiques du canal de propagation. Ainsi pour des canaux faciles (*i.e.* dont la distance minimale est celle du canal BAG) cette borne peut être atteinte (cf. Figure 3.9). En revanche, pour des canaux difficiles (par ex. Proakis B ou C), cette borne ne semble pas être la plus adaptée (cf. Figures 3.10, 3.12, 3.13 et 3.11). C'est pourquoi nous considérons aussi ici les bornes introduites dans la Section 3.5.1 précédente, à savoir la borne disjointe optimale ainsi que la borne jointe optimale.

Une borne plus adaptée serait celle du récepteur conjoint optimal car elle dépend à la fois du codeur, de l'entrelaceur et du canal. Les résultats de simulation tendent à montrer que dans notre exemple le Turbo-égaliseur n'atteint jamais cette borne (cf. Figures 4.2 et 4.3). Cependant, il atteint asymptotiquement la borne du disjoint optimal pour le canal Proakis C, lorsque l'égaliseur de la première itération est le MAP (cf. Figure 4.3).

La distance entre la borne du conjoint optimal et Turbo-égaliseur matérialise la perte due au traitement sous-optimal. Cherchons à l'analyser plus avant et à trouver les causes possibles de cette perte. Pour ce faire, observons les performances du Turbo-égaliseur après l'égaliseur (cf. Figure 4.4). Notons que l'AI dépasse les performances de l'égaliseur optimal et atteint la borne

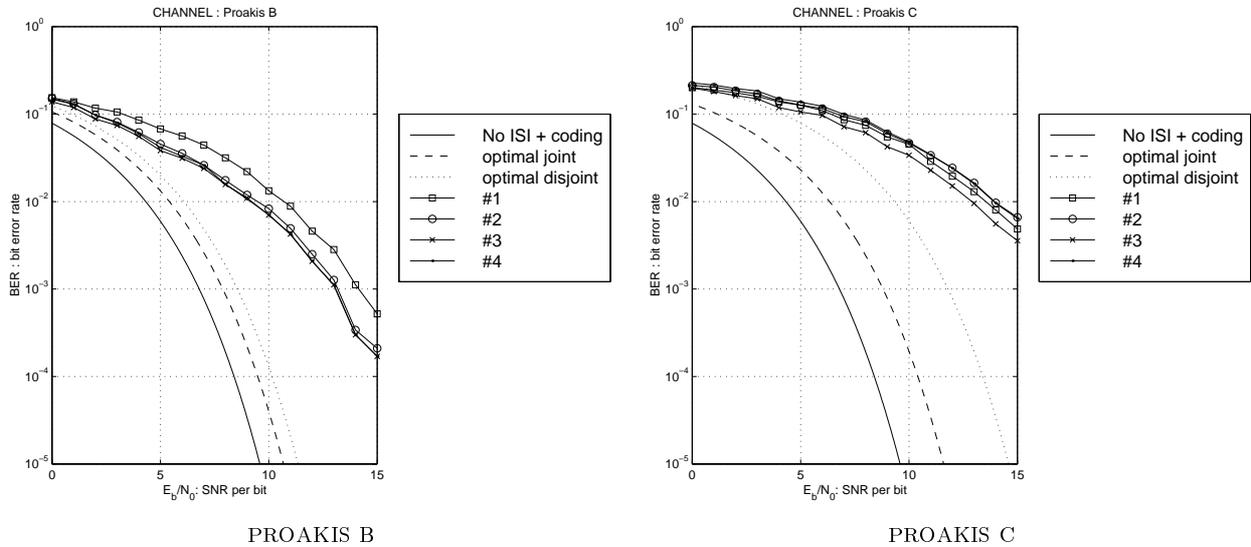


FIG. 4.2 – Performances du Turbo-égaliseur (1^{er} égaliseur DFE) après décodage sur canal Proakis B et C.

du canal BABG. Ceci s'explique par le fait que l'AI utilise une information a priori sur les bits codés et n'est donc pas un égaliseur classique. Cependant, en observant la Figure 4.3, il apparaît clairement que le décodeur n'atteint pas le gain de codage, que l'on pourrait attendre. En effet, si le décodeur atteignait le gain de codage, nous aurions après décodage les performances du canal BABG codé, ce qui n'est pas le cas. Ceci pourrait s'expliquer par le fait que le décodeur suppose que les données l'alimentant sont soumises à un bruit gaussien, ce qui sera discuté plus avant Section 4.4.3.

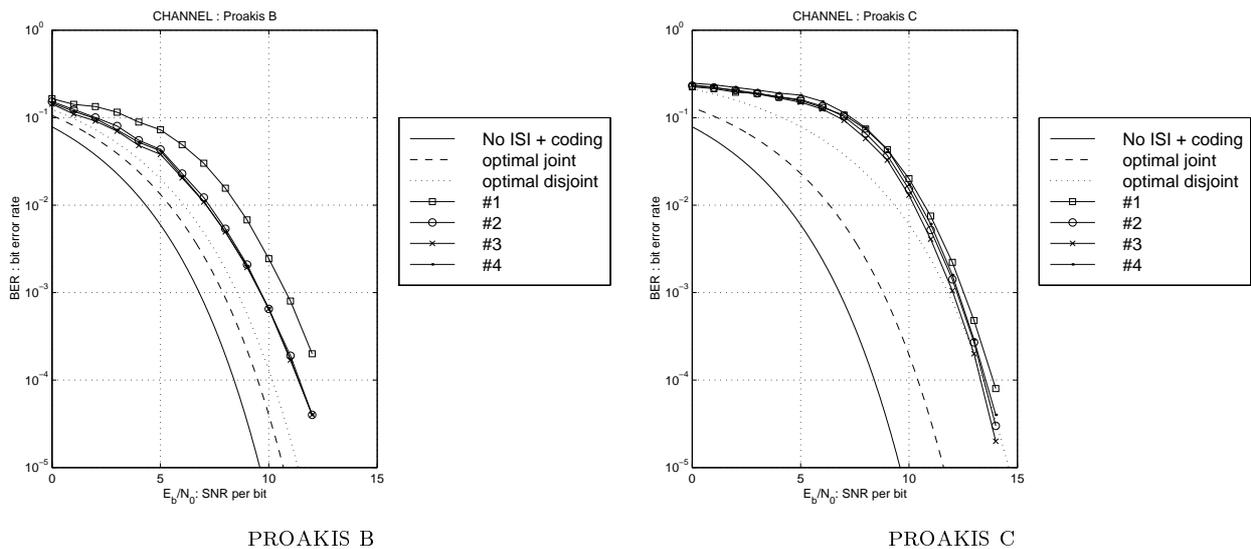


FIG. 4.3 – Performances du Turbo-égaliseur (1^{er} égaliseur MAP) après décodage sur canal Proakis B et C.

Enfin, une nouvelle piste de réflexion vient d'une analogie faite entre le Turbo-égaliseur et les codes concaténés en série. On remarque en effet, que lorsque deux codes sont concaténés en série, si le premier réalise bien le gain de codage escompté, il n'en est pas de même du second.

Toutes ces analyses nous amènent à penser que la structure du Turbo-égaliseur peut être

encore améliorée.

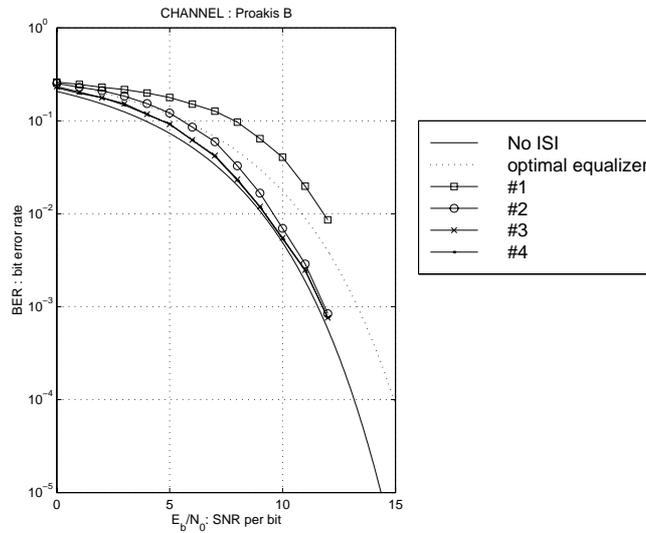


FIG. 4.4 – Performances du Turbo-égaliseur (1^{er} égaliseur MAP) après égalisation sur canal Proakis B.

Ainsi, pour notre exemple dit simple, le Turbo-égaliseur n’atteint jamais les performances du système joint optimal et tend au mieux vers le disjoint optimal pour le Proakis C et avec un égaliseur MAP en première itération (cf. Figure 4.3). Avec un meilleur code ($K = 7$), un entrelaceur non-uniforme de taille 64×64 et le MAP comme premier égaliseur, nous avons obtenu les performances de la Figure 3.13, où le canal Proakis B dépasse la borne disjoint optimal et le Proakis C tend vers cette même borne. Ainsi, le Turbo-égaliseur semble permettre d’atteindre le gain de codage escompté vis-à-vis du système disjoint réel qui ne le peut (cf. Figure 3.1), mais n’atteint pas la borne du disjoint optimal. En comparaison, le Turbo-détecteur obtient de meilleures performances notamment avec le canal à la distance plus faible encore que le Proakis B [18, Fig. IV.16, page 93]. Ceci nous amène à penser que l’anneur d’interférences est l’élément à améliorer, en tenant compte notamment de la nature des données retournées d_n^p [23].

4.4 Analyse fonctionnelle

Dans la section précédente (Section 4.3), nous avons comparé les performances du Turbo-égaliseur avec des bornes adaptées au problème de l’égalisation et du décodage conjoints. Cette analyse nous a permis de conclure, que le Turbo-égaliseur n’atteint pas, pour des canaux aux distorsions sévères, les performances du récepteur conjoint optimal au sens du MAP. La distance entre les courbes est due au processus itératif sous-optimal et plus précisément au décodeur qui n’atteint pas le gain de codage.

Puisque le décodeur semble ne pas fournir le gain escompté au cours des itérations, nous nous intéressons, dans cette nouvelle section, à caractériser le décodeur au cours du processus itératif. Pour ce faire, nous allons représenter les performances du Turbo-égaliseur en deux points stratégiques : après l’égaliseur et après le décodeur. Il est important de visualiser en ces deux points la même variable, de manière à voir son évolution au cours des itérations. De plus, cette variable doit contenir autant d’information que le TEB, pour connaître les performances

en ce point de la chaîne. Aussi, la variable choisie est l'inverse du rapport signal à bruit, soit la puissance d'erreur normalisée par la puissance utile.

Par l'étude de l'évolution de cette variable au cours des itérations, nous obtiendrons une nouvelle analyse du Turbo-égaliseur, que nous appellerons analyse fonctionnelle. Pour ce faire, nous nous inspirons de la démarche utilisée par [31] dans le cas d'une transmission multi-utilisateurs CDMA [31]. Ainsi, cette analyse nous permettra de prédire les performances du Turbo-égaliseur sans avoir recours aux simulations.

4.4.1 Principe de l'analyse fonctionnelle

Le Turbo-égaliseur est un récepteur qui s'articule autour de deux traitements principaux : l'égaliseur et le décodeur. Chacun de ces traitements a pour vocation de fournir à sa sortie une estimation de données plus fiable qu'à son entrée. En d'autres termes, la vocation de ces traitements est de diminuer la puissance d'erreur qui affecte les données. De plus, si nous faisons l'hypothèse d'une erreur blanche et gaussienne, cette erreur est complètement caractérisée par sa variance. Quant aux traitements d'égalisation et de décodage, ils ne sont pas seulement sensibles à la puissance d'erreur mais aussi à la puissance utile. En effet, la représentation classique des performances est la courbe du TEB en fonction du rapport signal à bruit *i.e.* le rapport puissance utile sur puissance de bruit (ou d'erreur ici). Aussi, dans notre nouvelle représentation des performances, nous devons plutôt considérer une puissance d'erreur normalisée *i.e.* le rapport de la puissance d'erreur sur la puissance utile.

De plus, pour expliquer le processus itératif, nous devons présenter des puissances d'erreur relatives aux mêmes données utiles. Nous choisissons pour données utiles les symboles émis d_n . L'estimation de d_n est disponible en deux points du Turbo-égaliseur (cf. Figure 4.6) soit sous la forme de y_n , soit sous la forme de d_n^p . Ainsi, au cours du processus itératif, la puissance d'erreur normalisée $P_{e,N}$ de l'estimée de d_n évolue, comme le montre la Figure 4.5.

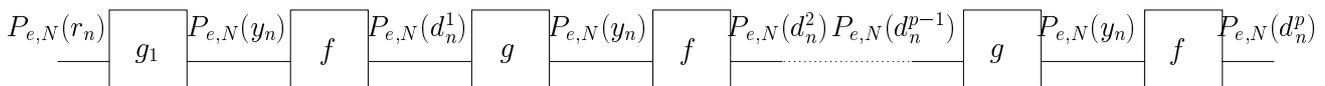


FIG. 4.5 – Evolution de la puissance d'erreur normalisée de l'estimée de d_n .

Puis, cette évolution est matérialisée en représentant sur la même figure, les courbes de l'égaliseur g^{-1} et du code f . Le point de concours de ces deux courbes est appelé un point fixe. D'après la théorie du point fixe, le Turbo-égaliseur converge vers ce point fixe si ce point est stable *i.e.* si la fonction $f \circ g$ est contractante :

$$|f \circ g(x)|_{x=\text{point fixe}} < 1.$$

Pour calculer les puissances d'erreur normalisées, nous supposons donc que les estimées y_n et d_n^p sont affectées d'une erreur BABG (cf. Section 4.4.1.1). Nous discuterons Section 4.4.3 la validité de ce modèle.

4.4.1.1 Modélisation des estimations de d_n

Scindons le Turbo-égaliseur selon deux traitements. Le premier correspond à l'égaliseur. Il est alimenté par les échantillons reçus :

$$r_n = h \star d_n + w_n, \text{ de puissance d'erreur normalisée } \sigma_{w,N}^2 = \frac{\sigma_w^2}{\gamma_h(0)\sigma_d^2}, \quad (4.3)$$

et par la sortie de l'itération précédente :

$$d_n^{p-1} = \zeta d_n + \varepsilon_n, \text{ de puissance d'erreur normalisée } \sigma_{\varepsilon,N}^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\zeta^2 \sigma_d^2}. \quad (4.4)$$

Il fournit une estimation pondérée du symbole d_n sous la forme

$$y_n = \beta d_n + \xi_n, \text{ de puissance d'erreur normalisée } \sigma_{\xi,N}^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{\beta^2 \sigma_d^2}. \quad (4.5)$$

Notons que l'indice N signifie normalisé.

Le second traitement correspond à l'ensemble : convertisseur M-aire binaire, désentrelaceur, décodeur, entrelaceur et calcul de d_n^p , comme présenté Figure 4.6. Pour simplifier le discours, nous appelons décodeur ce deuxième traitement. Il est alimenté par y_n de puissance d'erreur normalisée $\sigma_{\xi,N}^2$ (4.5) et fournit l'estimation pondérée d_n^p de puissance d'erreur normalisée $\sigma_{\varepsilon,N}^2$ (4.4).

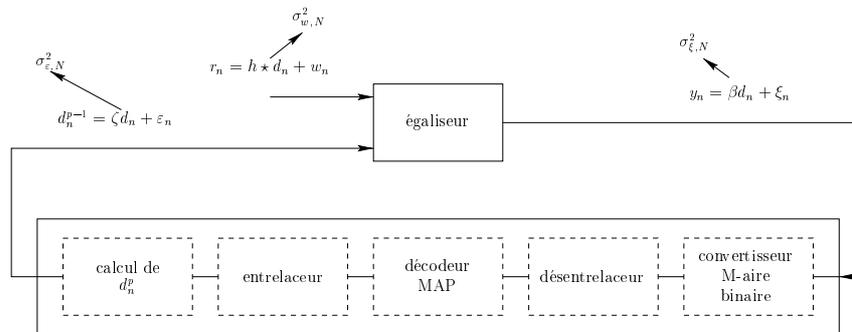


FIG. 4.6 – Nouvelle représentation du Turbo-égaliseur pour l'analyse fonctionnelle.

Pour des questions de simplicité, nous supposons que les modèles de y_n et de d_n^p sont indépendants des itérations. Aussi, β et ζ sont indépendants de p . De plus, nous supposons ζ , dans (4.4), et β , dans (4.5), indépendantes du temps n . Cette hypothèse est vérifiée pour β à la toute première itération, car le canal est invariant dans le temps et que la modulation est à deux états de même puissance (modulation de phase binaire et cohérente). En revanche pour ζ et pour les itérations suivantes de β , il s'agit d'une simplification.

De plus, pour tous les modèles (4.3), (4.4) et (4.5), nous considérons l'erreur gaussienne centrée et blanche. Cette hypothèse est vérifiée pour la sortie du canal (4.3). Nous discuterons les hypothèses de gaussianité relatives aux modèles (4.4) et (4.5) dans la section 4.4.3.

Dans la suite, toutes les puissances d'erreur considérées sont normalisées (sauf si le contraire est précisé) et nous ne rappellerons pas systématiquement normalisé.

4.4.1.2 Puissance d'erreur normalisée pour le code

Nous souhaitons maintenant calculer la puissance d'erreur en sortie du décodeur en fonction de celle à son entrée. De par l'hypothèse d'un modèle à erreur additive blanche gaussienne en entrée du décodeur (4.5), la courbe qui caractérise le décodeur est obtenue en simulant ce même décodeur à la sortie d'un canal BABG. La courbe obtenue $\sigma_{\varepsilon,N}^2 = f(\sigma_{\xi,N}^2)$ est présentée Figure 4.7.

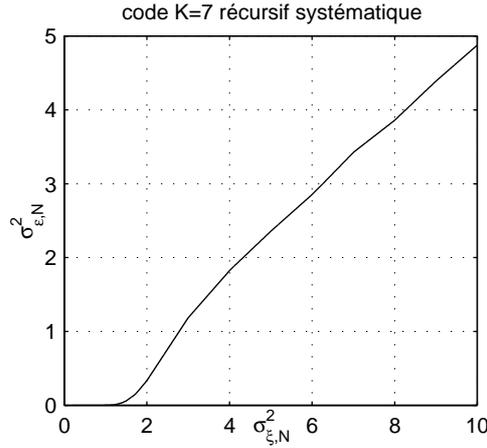


FIG. 4.7 – Puissance d'erreur du code.

4.4.1.3 Puissance d'erreur normalisée pour l'annuleur d'interférence

Calculons maintenant la puissance d'erreur en sortie de l'annuleur d'interférence en fonction de celle en entrée. De par les modèles de données (4.3) et (4.4), et de par les expressions des filtres de l'annuleur d'interférence (3.1), nous pouvons obtenir une expression analytique de la puissance d'erreur en sortie de cet égaliseur.

D'après (3.1), les expressions temporelles des filtres sont :

$$p_n = \alpha h_{-n}^*, \quad q_n = \alpha (\gamma_h(n) - \gamma_h(0)\delta_n) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_d^2 \gamma_h(0) + \sigma_w^2}. \quad (4.6)$$

La sortie de l'AI s'écrit :

$$\begin{aligned} y_n &= p \star r_n - q \star d_n^p, \\ &= (p \star h - \zeta q) \star d_n + p \star w_n - q \star \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait annulation d'interférence *i.e.* $p \star h - \zeta q = \alpha \gamma_h(0) \delta_n$, nous supposons $\zeta = 1$. Dès lors, nous obtenons avec (4.6) :

$$y_n = \alpha \gamma_h(0) d_n + p \star w_n - q \star \varepsilon_n.$$

D'où

$$\beta = \alpha \gamma_h(0)$$

Nous avons déjà supposés que les processus w_n et ε_n sont blancs et centrés. Supposons de plus ces processus indépendants entre eux grâce à l'entrelaceur. Aussi, nous obtenons :

$$\sigma_{\xi}^2 = \text{var}(p \star w_n) + \text{var}(-q \star \varepsilon_n) = \gamma_p(0) \sigma_w^2 + \gamma_q(0) \sigma_{\varepsilon}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad \gamma_p(0) &= \alpha^2 \gamma_h(0), \\ \gamma_q(0) &= \alpha^2 \Gamma_h. \end{aligned}$$

où Γ_h est l'autocorrélation de l'autocorrélation du canal h_n sans le terme central. En effet,

$$\begin{aligned} \Gamma_h &= \sum_n (\gamma_h(n) - \gamma_h(0)\delta_n) (\gamma_h(-n)^* - \gamma_h(0)\delta_n), \\ &= \sum_n \gamma_h(n)\gamma_h(-n)^* - \gamma_h(0)^2 \delta_n. \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^2 &= \alpha^2 \gamma_h(0) \sigma_w^2 + \alpha^2 \Gamma_h \sigma_\varepsilon^2, \\ \sigma_{\xi,N}^2 &= \frac{\sigma_\xi^2}{\beta^2 \sigma_d^2} = \frac{\sigma_w^2}{\gamma_h(0) \sigma_d^2} + \frac{\Gamma_h \sigma_\varepsilon^2}{\gamma_h(0)^2 \sigma_d^2}, \\ &= \sigma_{w,N}^2 + \frac{\Gamma_h}{\gamma_h(0)^2} \sigma_{\varepsilon,N}^2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

d'après (4.3) et (4.4) et en supposant $\zeta = 1$.

Les caractéristiques des anneaux d'interférence $\sigma_{\xi,N}^2 = g_{\sigma_{w,N}^2}(\sigma_{\varepsilon,N}^2)$ sont présentées Figure 4.8 pour différents canaux.

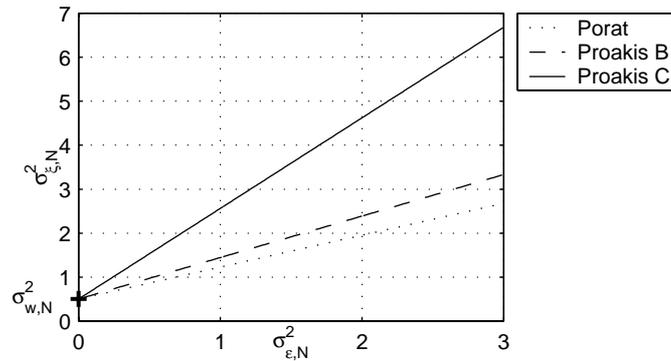


FIG. 4.8 – Puissance d'erreur de l'anneau d'interférence.

4.4.1.4 Puissance d'erreur normalisée pour le DFE

Dans le cas du DFE, la puissance d'erreur en sortie de l'égaliseur dépend uniquement du rapport signal à bruit de la transmission et donc de $\sigma_{w,N}^2$. Nous avons utilisé le DFE présenté dans [54], où est calculé le rapport signal à bruit en sortie de l'égaliseur en fonction de celui en entrée avec l'hypothèse de données retournées exactes. Nous en déduisons directement la courbe $\sigma_{\xi,N}^2 = g(\sigma_{w,N}^2)$, que nous représentons en pointillé sur la Figure 4.9.a. Une simulation avec données retournées estimées, nous donne la courbe en trait plein $\sigma_{\xi,N}^2 = g(\sigma_{w,N}^2)$. La distance entre les courbes en trait plein et pointillé montre donc l'incidence des erreurs d'estimation retournées (et donc du phénomène de propagation d'erreur) sur la puissance d'erreur en sortie de l'égaliseur.

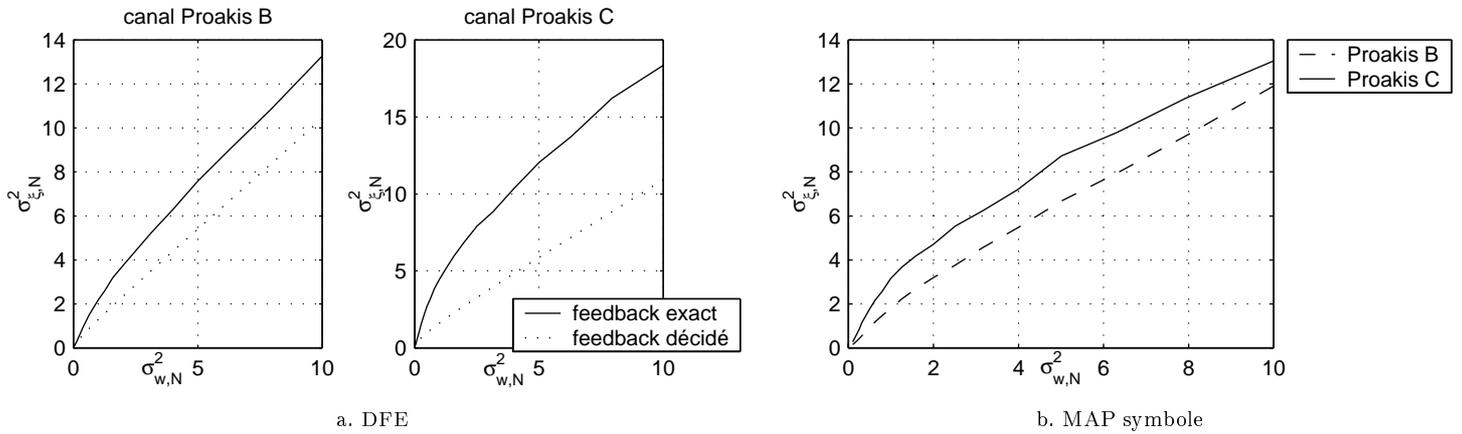


FIG. 4.9 – Puissance d’erreur pour les égaliseurs DFE et MAP symbole.

4.4.1.5 Puissance d’erreur normalisée pour l’égaliseur MAP symbole

C’est par une simulation que nous obtenons ici la puissance d’erreur en sortie de l’égaliseur MAP symbole en fonction de celle en entrée. La Figure 4.9.b montre la courbe $\sigma_{\xi,N}^2 = g(\sigma_{w,N}^2)$ pour l’égaliseur MAP symbole et pour différents canaux.

4.4.2 Application au cas des canaux sélectifs en fréquence

Appliquons cette analyse au Turbo-égaliseur pour des canaux sélectifs en fréquence, que nous utilisons dans cette thèse, à savoir les canaux Porat & Friedlander, Proakis B et Proakis C. Pour ce faire, classons les canaux selon que le Turbo-égaliseur tende ou ne tende pas vers la borne BABG codé (définie Section 4.2.2)

4.4.2.1 Cas des canaux, où le Turbo-égaliseur tend vers la borne BABG codé

Tout d’abord, nous représentons la courbe du code $\sigma_{\varepsilon,N}^2 = f(\sigma_{\xi,N}^2)$. Cette courbe a été obtenue avec l’hypothèse que le modèle de l’erreur en entrée du décodeur est bien BABG. Nous validons cette courbe pour le Turbo-égaliseur, en observant les courbes $\sigma_{\varepsilon,N}^2 = f(\sigma_{\xi,N}^2)$ pour chaque décodeur du Turbo-égaliseur. La comparaison de ces courbes avec celle obtenue sur canal BABG est présentée Figure 4.10 et montre que nous pouvons utiliser dans notre analyse

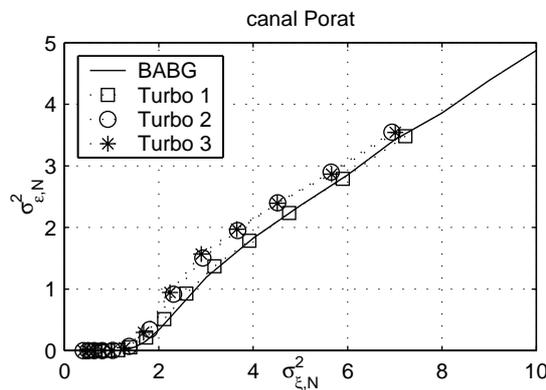


FIG. 4.10 – Validation de la courbe du code pour le canal Porat.

fonctionnelle la courbe du décodeur obtenue sur le canal BABG.

Quant à l'annuleur d'interférence, il est décrit par la courbe $\sigma_{\varepsilon,N}^2 = g_{\sigma_{w,N}^2}^{-1}(\sigma_{\xi,N}^2)$. Pour un rapport signal à bruit donné de transmission (*i.e.* $\sigma_{w,N}^2$ fixé), il s'agit d'une droite définie en (4.7).

Plaçons nous dans le cas, où le bruit de la transmission est tel que le RSB utile vaut -5dB . Les courbes du code et de l'AI (pour ce RSB utile) sont présentées Figure 4.11.a. Pour ce RSB utile, la première itération (*i.e.* égaliseur et décodeur) fournissent une puissance d'erreur notée par un cercle. Puis, l'AI traite les données et donne (ici) une puissance d'erreur plus faible, de même pour le décodeur et ainsi de suite jusqu'à la convergence vers le point fixe, noté par une étoile. La Figure 4.11.b présente la valeur de la dérivée en le point fixe pour différentes valeurs de RSB utile. Cette Figure montre que dans la zone d'intérêt de fonctionnement du Turbo-égaliseur le point fixe est stable et le Turbo-égaliseur converge donc bien vers ce point.

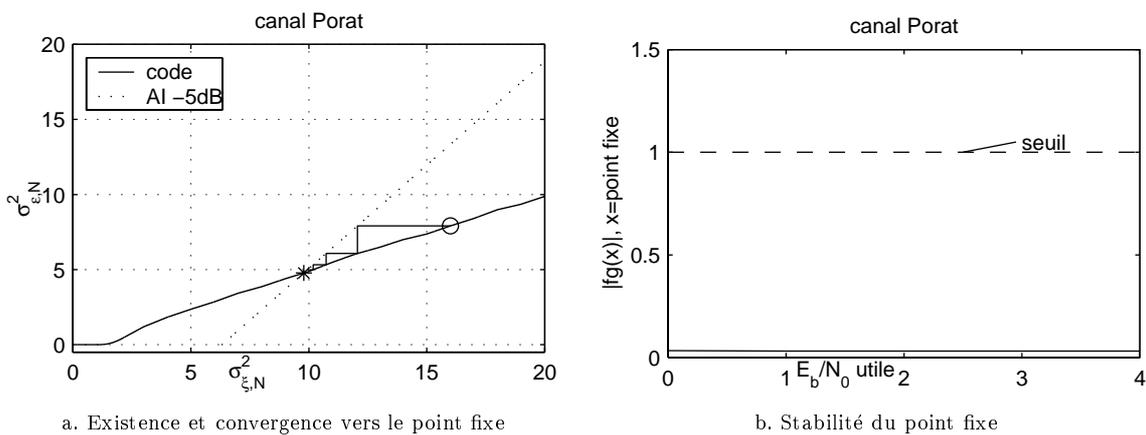


FIG. 4.11 – *Processus itératif du Turbo-égaliseur: cas du canal Porat.*

Le point fixe est toujours situé (par définition) sur la courbe du décodeur. Or, cette courbe a été obtenue sur un canal BABG. Donc, cette courbe n'est autre que la borne BABG codé présentée Section 4.2. Néanmoins, si le point fixe est situé sur cette courbe BABG codé, cela ne signifie pas systématiquement que le Turbo-égaliseur va tendre en performances vers le BABG codé. Nous expliquons ceci en observant la Figure 4.12. Fixons le rapport signal à bruit utile *i.e.* fixons $\sigma_{w,N}^2$. Dans le cas de la simulation du décodeur sur un canal BABG, il correspond à cette valeur de $\sigma_{w,N}^2$ une puissance d'erreur en sortie du décodeur notée par une croix (+). En revanche, le Turbo-égaliseur converge vers le point fixe noté par une étoile (*), pour lequel la puissance en sortie est plus grande. Nous mettons donc en évidence une distance Δ entre les performances du BABG codé et du Turbo-égaliseur. La Figure 4.12 montre également qu'à fort $\sigma_{w,N}^2$ (*i.e.* faible RSB utile) cet écart Δ est important, alors qu'à faible $\sigma_{w,N}^2$ (*i.e.* fort RSB utile) la distance Δ est quasi nulle.

Ainsi, par notre analyse fonctionnelle, nous obtenons une prédiction des performances asymptotiques du Turbo-égaliseur à savoir le Turbo-égaliseur tend vers la borne BABG codé (à fort RSB utile), résultat confirmé par les simulations (cf. Figure 3.9). De plus, nous pouvons définir une notion de difficulté de canal. En effet, si la courbe de l'AI $\sigma_{\varepsilon,N}^2 = g_{\sigma_{w,N}^2}^{-1}(\sigma_{\xi,N}^2)$ avait une pente infinie, il n'y aurait aucun écart Δ et les performances seraient toujours celles du BABG codé. Ainsi, plus la pente est faible *i.e.* plus

$$\frac{\gamma_h(0)^2}{\Gamma_h} \text{ est faible ,}$$

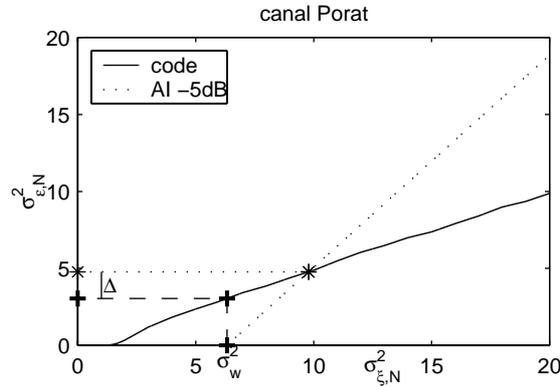


FIG. 4.12 – Explication de l'écart entre le Turbo-égaliseur et la borne BABG codée.

plus le canal est difficile à traiter pour le Turbo-égaliseur.

Ainsi, pour les canaux, où le Turbo-égaliseur tend vers la borne BABG codé, nous obtenons une bonne prédiction des performances du Turbo-égaliseur. De plus, nous obtenons une définition de la sévérité du canal, lorsque le traitement utilisé est le Turbo-égaliseur.

4.4.2.2 Cas des canaux, où le Turbo-égaliseur ne tend pas vers le BABG codé

Nous nous intéressons maintenant au cas plus difficile, où il existe une distance importante entre le Turbo-égaliseur et la borne BABG codé et ce même à fort RSB, comme pour les canaux Proakis B et C. Les simulations ont montré que le comportement du décodeur au cours des itérations Turbo est très différent du cas où le décodeur est placé après un canal BABG, comme le montre la Figure 4.13.

Aussi, de manière à prédire, même dans ce cas, les performances asymptotiques du Turbo-égaliseur, nous avons appliqué une pénalité à la puissance d'erreur entrant dans le décodeur. De manière à pouvoir toujours prédire les performances, il nous fallait utiliser un coefficient calculable avec les connaissances seules du code et du canal. En appliquant le coefficient multiplicatif :

$$\frac{d_{min\ canal}^2}{d_{min\ BABG}^2}$$

à la puissance d'entrée du décodeur, nous obtenons la courbe en trait discontinu, qui s'approche (plus ou moins) des courbes du décodeur de la simulation Turbo. C'est cette courbe pénalisée que nous utiliserons dans la suite, pour expliquer le processus itératif du Turbo-égaliseur.

Notons que nous pouvons également appliquer cette courbe pénalisée au cas des canaux de type Porat détaillé Section 4.4.2.1. En effet, pour le canal Porat le coefficient vaut 1 et la courbe pénalisée est confondue avec celle du code sur canal BABG.

Fort de cette nouvelle courbe du code, étudions maintenant les canaux Proakis B et C en appliquant notre analyse fonctionnelle.

4.4.2.2.1 Cas du canal Proakis B

Plaçons nous dans le cas, où le bruit de la transmission est tel que le RSB utile vaut 0dB. Les courbes du code (pénalisé) et de l'AI (pour ce RSB utile) sont présentées Figure 4.14.a et montrent la présence d'un point fixe, comme pour le canal Porat.

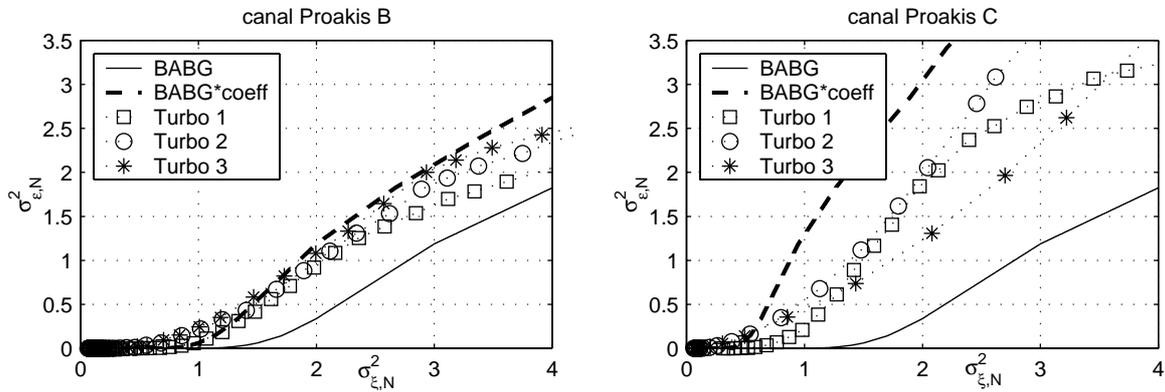


FIG. 4.13 – Validation de la courbe du code pour les canaux Proakis B et C.

La Figure 4.14.b présente la stabilité de ce point fixe en fonction du RSB utile. Il est intéressant de noter, que ce point est stable à partir d’une valeur de RSB d’environ 3 dB, ce qui pourrait correspondre au point de déclenchement. L’analyse des performances du Turbo-égaliseur a montré (cf. Tableau 3.1, page 69) que le déclenchement du Turbo-égaliseur sur le canal Proakis B a lieu à un RSB utile d’environ 1.5/2 dB. L’écart de 1 dB, pourrait s’expliquer par le fait que nous n’avons pas la courbe exacte du code.

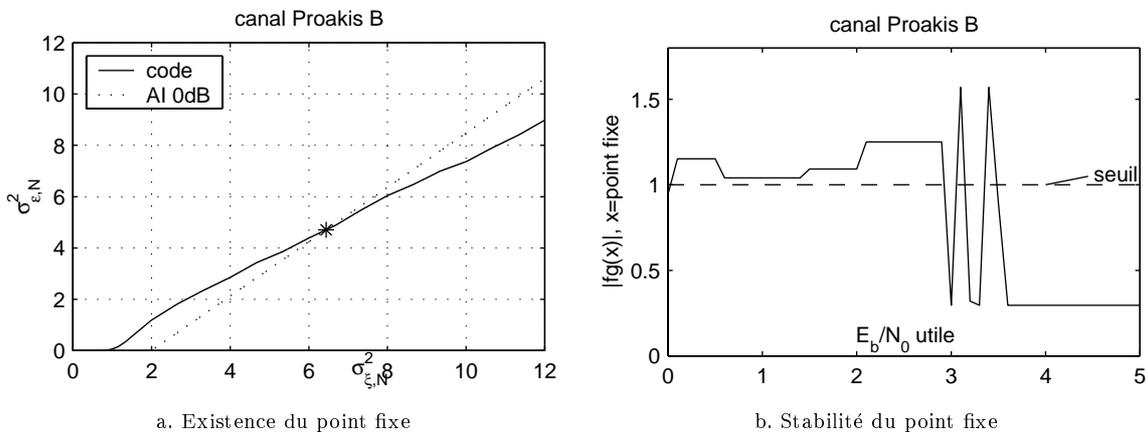


FIG. 4.14 – Processus itératif du Turbo-égaliseur: cas du canal Proakis B.

Ainsi, nous avons montré l’existence d’un point fixe dans le cas du Proakis B. De plus, la limite de stabilité de ce point fixe pourrait correspondre au point de déclenchement.

4.4.2.2.2 Cas du canal Proakis C

Dans le cas du canal Proakis C, nous observons un phénomène différent du canal Proakis B. En effet, il n’existe pas toujours un point fixe. Le cas limite d’existence pourrait coïncider avec le point de déclenchement. Nous avons trouvé (cf. Tableau 3.1, page 69) avec le canal Proakis C un point de déclenchement entre 6 et 10 dB. Ici, la limite d’existence du point a lieu à 6.5 dB.

Avec le canal Proakis C nous observons un cas différent du canal Proakis B. Ici, c’est la limite d’existence du point fixe qui semble déterminer le point de déclenchement.

De plus, l’étude des canaux Proakis B et C confirme l’observation faite pour le canal Porat : plus la pente de l’AI est faible (*i.e.* plus $\gamma_h(0)^2/\Gamma_h$ est faible), plus les performances du Turbo-

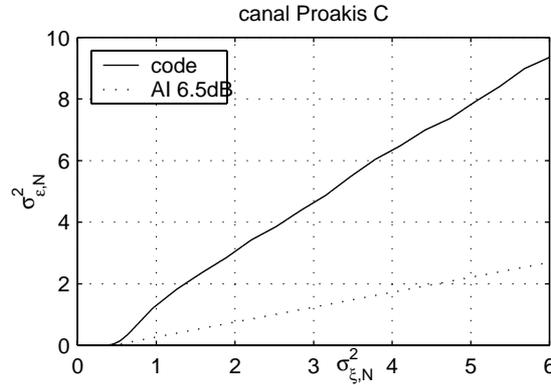


FIG. 4.15 – Existence du point fixe pour le canal Proakis C.

égaliseur sont mauvaises.

4.4.3 Causes du mauvais fonctionnement du décodeur: validité du modèle BABG

Dans la section précédente 4.4.2.2, nous avons montré que pour des canaux difficiles, l'analyse utilisant l'hypothèse d'une erreur blanche et gaussienne, ne permet pas de prédire le fonctionnement du Turbo-égaliseur. En effet, il nous a fallu ajouter une pénalité au code, car à puissance d'erreur en entrée égale, le décodeur fournit une puissance d'erreur plus importante en sortie lorsqu'il est alimenté par la sortie de l'égaliseur que lorsqu'il est alimenté par la sortie du canal BABG. Cependant, l'hypothèse d'une erreur blanche et gaussienne en sortie de l'AI a été faite *a priori* et il nous paraît important de valider cette hypothèse.

Pour ce faire, nous considérons la sortie de l'AI pour le canal Proakis C, canal le plus difficile étudié ici et où le modèle BABG doit être le plus faux. Nous nous plaçons d'une part à 5 dB (cf. Figure 4.16) *i.e.* avant le point de déclenchement et d'autre part à 11 dB (cf. Figure 4.17) *i.e.* après ce point.

Dans ces Figures 4.16 et 4.17, nous observons différentes statistiques pour les données $y_n = \beta d_n + \xi_n$ entrant dans le décodeur. Ainsi, pour chaque itération (une ligne correspond à une itération), nous observons, de gauche à droite, les densités de probabilités $P(\Re(y_n)|d_n = 1)$ et $P(\Re(y_n)|d_n = -1)$, puis la densité de probabilité de la partie imaginaire de l'erreur $P(\Im(\xi_n))$, puis les échantillons de partie réelle de l'erreur $\Re(\xi_n)$ et enfin l'autocorrélation de l'erreur.

Itération	$P(\Re(y_n) d_n = 1)$	$P(\Re(y_n) d_n = -1)$
1	G 4.00119	NG 13.81500
2	NG 64.99286	NG 76.25663
3	NG 21.87118	NG 81.74075
4	NG 53.78458	NG 40.29923
5	NG 56.29801	NG 76.86348
6	NG 99.80638	NG 78.72508

TAB. 4.2 – Résultat du test de gaussianité pour le canal Proakis C à 5 dB.

Testons tout d'abord la gaussianité de l'erreur ξ_n et notamment de sa partie réelle qui porte l'information utile (dans le cas d'une modulation de phase binaire cohérente avec pour symboles

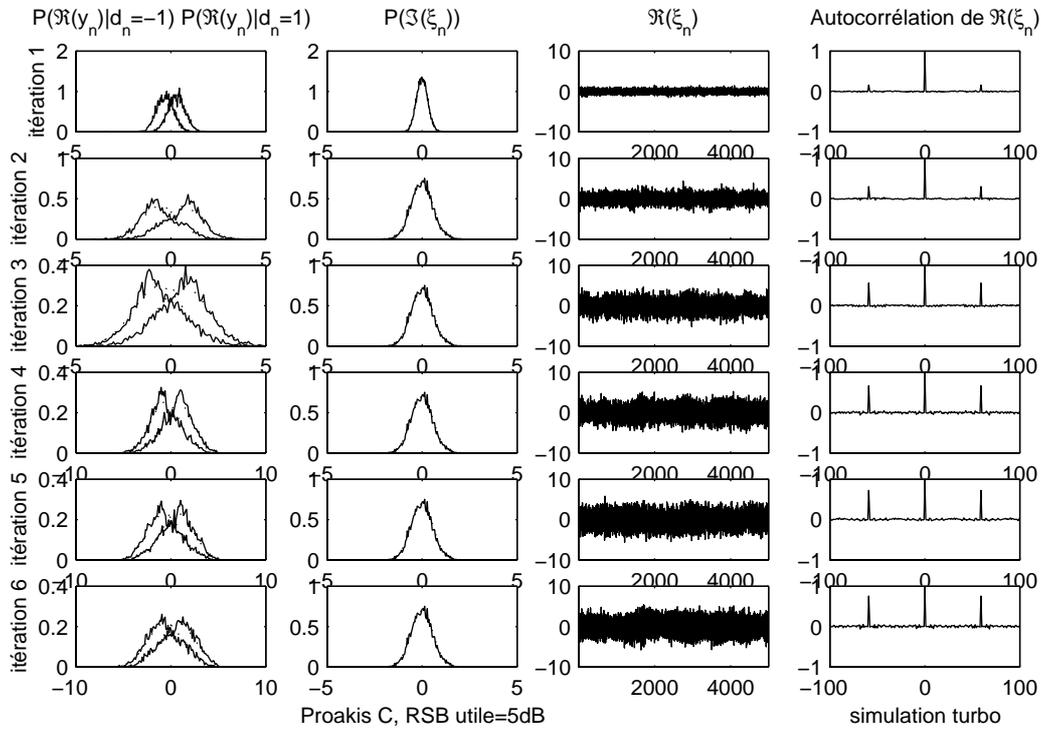


FIG. 4.16 – Validité du modèle BABG pour le canal Proakis C avant le point de déclenchement (5 dB). Données observées : y_n entrelacé (entrée du décodeur).

1 et -1). Pour ce faire, nous avons utilisé le test basé sur les cumulants d'ordre 3 et 4 et proposé par [16]. Il teste donc la symétrie de la densité et son aplatissement. Ce test permet de décider si la densité testée est gaussienne ou non, en calculant une statistique basée sur les écarts gaussiens normalisés correspondant aux moments d'ordre 3 et 4 et en la comparant à un seuil, fonction du taux d'erreur toléré par rapport à la gaussienne. Nous avons toléré ici 5% d'erreur et le résultat du test est présenté Tableaux 4.2 et 4.3. Le seuil pour des séquences de taille 5000 et pour une tolérance d'erreur de 5% vaut 5.812675 et si la statistique pour la densité testée est plus grande que le seuil, la densité testée est décidée non-gaussienne (NG) et gaussienne (G) sinon. Ainsi, pour presque toutes les itérations et quelque soit le RSB (5 ou 11 dB), les densités de probabilité $P(\Re(y_n)|d_n = 1)$ et $P(\Re(y_n)|d_n = -1)$ sont NON GAUSSIENNES.

Itération	$P(\Re(y_n) d_n = 1)$	$P(\Re(y_n) d_n = -1)$
1	NG 303.59397	NG 449.73656
2	NG 659.11317	NG 1175.85027
3	NG 1436.64213	NG 1871.42903
4	NG 1172.59847	NG 2762.65551
5	NG 1302.04215	NG 2306.73097
6	NG 2291.85882	NG 1929.87387

TAB. 4.3 – Résultat du test de gaussianité pour le canal Proakis C à 11 dB.

Quant à la blancheur de l'erreur, elle est quasi vérifiée d'après la visualisation. Il demeure des pics secondaires, mais qui sont suffisamment éloignés du pic central pour ne pas gêner le décodeur.

Ainsi, nous avons montré que les estimées à l'entrée du décodeur sont affectées d'erreurs

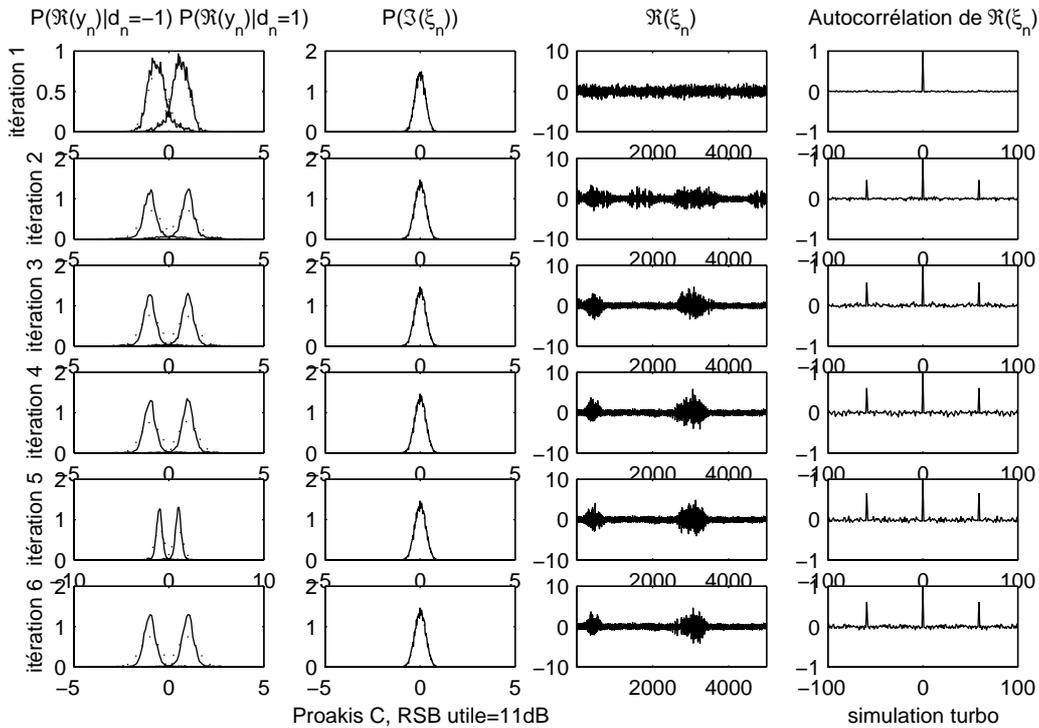


FIG. 4.17 – Validité du modèle BABG pour le canal Proakis C après le point de déclenchement (11 dB).

qui ne sont pas gaussiennes. Or, le décodeur utilise explicitement le modèle BABG. Aussi, l'algorithme de décodage est sous-optimal pour les conditions réelles de simulation et il est normal de ne pas atteindre le gain de codage.

4.5 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons analysé les performances du Turbo-égaliseur. Nous avons tout d'abord défini de nouvelles bornes adaptées au problème de l'égalisation et du décodage conjoints. Nous avons ainsi mis en évidence que la borne BABG codé n'est pas ici la borne la plus pertinente, car elle ne peut être atteinte pour tous les canaux. Aussi, nous avons calculé une borne pour le récepteur conjoint optimal au sens du MAP. La distance observée entre cette borne et les performances du Turbo-égaliseur montre l'effet de la sous-optimalité de ce Turbo-égaliseur. Néanmoins, si le récepteur conjoint optimal est de grande complexité, sa borne l'est aussi et il n'est pas toujours possible de pouvoir la calculer. Ainsi, dans de nombreux cas, nous devons nous satisfaire de la borne BABG codé et de la borne disjoint optimal, sachant que la borne conjoint optimal se trouve entre les deux dernières. D'autre part, si nous comparons les performances du Turbo-égaliseur avec la borne BABG codé, il faudra se rappeler que la distance entre ces deux courbes est imputable d'une part au canal lui-même et d'autre part à la sous-optimalité du Turbo-égaliseur.

L'analyse des performances a également montré un résultat fort surprenant. Après l'égaliseur, nous avons les performances du canal BABG. En revanche, le décodeur ne donne pas le gain de codage. Aussi, dans une seconde partie, nous nous sommes intéressés à caractériser le processus itératif en visualisant, au cours des itérations, l'évolution de la puissance d'erreur normalisée

i.e. le rapport de la puissance d'erreur sur la puissance utile.

Dans cette analyse, nous avons dû appliquer une pénalité à la courbe représentant le code, pénalité égale au rapport des distances minimales au carré sur canal sélectif et sur canal BABG. Puis, les performances asymptotiques du Turbo-égaliseur sont données par la résolution du point fixe, point de concours entre les courbes du code (pénalisée) et de l'AI. Il nous semble possible alors d'expliquer le point de déclenchement soit comme la limite d'existence du point fixe, soit, si ce point existe toujours, comme sa limite de stabilité. De plus, nous avons obtenu une nouvelle définition de la difficulté du canal lorsqu'il est traité par le Turbo-égaliseur, en fonction de l'autocorrélation de l'autocorrélation du canal (sans le terme central).

Enfin, nous avons testé la validité du modèle BABG en entrée du décodeur, afin de pouvoir expliquer ses mauvaises performances. Nous avons alors montré que si l'hypothèse de blancheur est quasiment vérifiée, il n'en est pas de même pour l'hypothèse gaussienne.

Chapitre 5

Détection multi-utilisateurs et décodage conjoints : Turbo-CDMA

5.1 Introduction

Après avoir présenté puis analysé le Turbo-égaliseur (proposé par Laot [43]) dans les deux chapitres précédents, nous nous intéressons maintenant à son application aux transmissions radiomobiles. Pour ce faire, rappelons que les normes radiomobiles déterminent uniquement les caractéristiques de l'émetteur et que le choix du récepteur revient au constructeur. Ainsi, le Turbo-égaliseur, présenté aux chapitres 3 et 4, en tant que solution au problème de l'égalisation et du décodage conjoints, s'applique directement au cas des transmissions TDMA (*Time Division Multiple Access*), où les données codées sont transmises sur des canaux sélectifs en fréquence et en temps, comme dans la norme GSM. Nous nous intéressons ici plutôt à l'application du Turbo-égaliseur aux normes radiomobiles avec accès multiple par répartition par code (AMRC ou CDMA en anglais pour code division multiple access), comme dans la norme UMTS. Dans la suite, nous préférons l'acronyme anglais plus couramment utilisé.

Ce choix de la norme CDMA est motivé par le fait que le CDMA bénéficie aujourd'hui d'un intérêt tout particulier, qui lui vaut de figurer dans de nombreuses normes (IS-95, IMT-2000 et UMTS en cours de normalisation). Néanmoins, les perturbations subies par le signal utile émis sont plus nombreuses que dans le cas du TDMA, car, en plus des interférences entre symboles, le signal est soumis à des interférences dues à la présence des autres utilisateurs. Nous souhaitons ici éliminer ou réduire tous les types d'interférence grâce à une méthode peu complexe mais performante. Cette méthode sera déduite de la Turbo-égalisation, où nous gardons le principe d'une égalisation peu complexe à base de filtres [43].

Pour ce faire, nous rappelons brièvement le système de transmission CDMA et quelques-uns de ses récepteurs les plus classiques, puis ceux qui intègrent une information de décodage. Nous pourrions alors proposer le modèle CDMA, que nous utiliserons tout au cours de ce chapitre. Lui fera directement suite, la définition du problème de la détection multi-utilisateurs et du décodage conjoints. Dès lors, nous pourrions introduire un premier schéma de réception Turbo-CDMA. Pour celui-ci, nous introduirons de nouveaux égaliseurs à base de filtres pour la première itération (de type DFE) mais aussi pour les itérations suivantes (annuleur d'interférences). Pour les DFE, nous introduirons un nouveau critère relatif à l'ordre de démodulation des utilisateurs. Enfin, nous proposerons une amélioration de cette structure.

Nous n'aborderons pas dans cette thèse le problème de la sélectivité du canal en temps. En

effet, nous supposons les variations du canal au cours du temps suffisamment lentes pour que l'estimation du canal par la séquence d'apprentissage demeure exacte pour le bloc traité. Notons que ceci nous impose donc de considérer des traitements par bloc. Rappelons maintenant quelques récepteurs CDMA « classiques ».

Le contenu de ce chapitre est protégé par 2 brevets déposés par Thomson-CSF Communications.

5.2 Etat de l'art

La technique CDMA à séquence directe utilise le principe de l'étalement de spectre. Ainsi, la transmission est effectuée à un débit beaucoup plus élevé que nécessaire pour chaque utilisateur, ce qui est réalisé grâce à la multiplication des symboles utiles par des séquences à haut débit, appelées séquences d'étalement. Ces séquences sont également appelées signature ou code, d'où le nom de la technique d'accès multiple. Les contributions de chaque utilisateur sont alors transmises dans la même bande fréquentielle et dans le même intervalle temporel. Comme tous les utilisateurs partagent les mêmes ressources temporelles et fréquentielles, la séparation entre les utilisateurs est obtenue grâce à l'utilisation de séquences orthogonales.

Les premiers récepteurs CDMA opèrent utilisateur par utilisateur et consistent à multiplier le signal reçu par la séquence d'étalement d'un utilisateur donné. Cette opération, appelée désétalement, ramène le signal dans sa bande utile (non-étalée), alors que la contribution des autres utilisateurs projetée dans l'espace de l'utilisateur d'intérêt est faible (et ce d'autant plus que l'orthogonalité est respectée). Les propriétés statistiques des interférences dues aux autres utilisateurs étant supposées proches d'un bruit additif blanc gaussien, ces utilisateurs interférents sont vus comme du bruit et nous obtenons un gain de traitement dit « gain d'étalement », égal au rapport du débit de la transmission sur le débit utile. C'est l'existence de ce gain d'étalement, qui permet de faire cohabiter plusieurs utilisateurs.

Le récepteur précédent est un banc de filtres adaptés mono-utilisateur. Verdú montre dans [71] que l'approche *mono-utilisateur* (comme le récepteur RAKE), qui démodule séparément tous les utilisateurs, n'est pas la plus performante car elle néglige la présence d'interférence due aux autres utilisateurs (interférence appelée « interférence multi-utilisateurs », MUI pour *multiuser interference*). Il faut lui préférer la *détection multi-utilisateurs* [72], qui les démodule conjointement, et exploite ainsi des informations plus riches relativement aux autres utilisateurs. Dans [71], il propose le détecteur multi-utilisateurs optimal. Il consiste en un banc de filtres adaptés suivi d'un algorithme de type Viterbi (pour la détection optimale au sens du Maximum de vraisemblance) ou de l'algorithme de type aller-retour (pour la détection optimale au sens du MAP, qui minimise le TEB). Il met ainsi en évidence un écart important dans les performances entre les méthodes mono et multi et surtout, il montre que le problème du *near-far* (proche-lointain) n'est pas inhérent à la technique CDMA mais est due au traitement mono-utilisateur. Ce problème du *near-far* apparaît lorsque tous les mobiles émettent à la même puissance. Alors, un émetteur placé à proximité de la station de base utilise la quasi-totalité de la capacité d'accès multiple de la cellule et empêche les autres utilisateurs de communiquer. Une solution, lorsque le récepteur est mono-utilisateur, consiste à assurer un contrôle de puissance tel que tous les signaux reçus soient de même puissance au niveau du récepteur.

Néanmoins, le récepteur optimal [71] est NP-complet et il n'existe aujourd'hui aucun algorithme à complexité polynomiale solution d'un problème NP-complet [15, page 914]. C'est pourquoi, pour satisfaire les contraintes d'implémentation temps-réel, il est nécessaire de développer des récepteurs sous-optimaux de moindre complexité calculatoire. Ainsi, Lupas et Verdú proposent un décorrélateur, qui offre la même résistance au problème du *near-far* que le détecteur

optimal, aussi bien dans le cas synchrone [47] que asynchrone [48]. Il est intéressant de noter que la détection multi-utilisateurs, proposée pour combattre efficacement l'interférence MUI, dérive directement de l'égalisation qui traite, quant à elle, l'IES introduite par les canaux sélectifs en fréquence. Ainsi, le décorrélateur, cité ci-dessus, peut être vu comme une généralisation au cas multi-utilisateurs de l'égaliseur linéaire. Il existe donc tout un ensemble de solutions sous-optimales dérivées des égaliseurs linéaires ou DFE et optimisés selon les critères ZF ou EQMM [39, 72].

Nous considérons ici le cas de la liaison montante *i.e.* la transmission des mobiles vers la station de base. Dans ce cas, la synchronisation entre les différents utilisateurs et la station de base ne peut être maintenue de manière précise. De plus, conformément aux études précédentes (cf. Chapitres 3 et 4), nous considérons toujours des canaux sélectifs en fréquence ou dispersifs en temps (cf. Section 2.2.2). Ainsi, le signal d'un utilisateur est soumis à de l'interférence due aux autres utilisateurs (MUI) mais aussi à de l'interférence entre symboles (IES). Dans un contexte aussi difficile, l'approche la plus adaptée est, d'après ce qui précède, alors la *détection multi-utilisateurs* [72], qui démodule conjointement tous les utilisateurs, plutôt que de les démoduler séparément comme dans les récepteurs *mono-utilisateur*.

Les travaux « classiques » relatifs à la détection multi-utilisateurs n'intègrent pas le codage. Ainsi, [71, 47, 48, 39]. Cependant, la plupart des systèmes de transmission sans fil prévoient l'utilisation du codage de canal de manière à améliorer les performances. Ainsi, [34] montre l'intérêt de combiner codage de canal et techniques CDMA. Dans ce cas, un traitement conjoint détection multi-utilisateurs / décodage de canal s'impose comme étant l'optimal. C'est ce problème que nous souhaitons présenter plus avant dans ce chapitre. Nous présenterons différentes solutions sous-optimales à ce problème et enfin plusieurs solutions « Turbo », qui généralisent les travaux de [18, 43] pour un seul utilisateur au cas multi-utilisateurs.

5.3 Position du problème

Avant d'explicitier le problème de la détection multi-utilisateurs et du décodage conjoints, modélisons le système multi-utilisateurs CDMA dans le cas d'une transmission sur un canal multitrajets, asynchrone et à bruit additif gaussien.

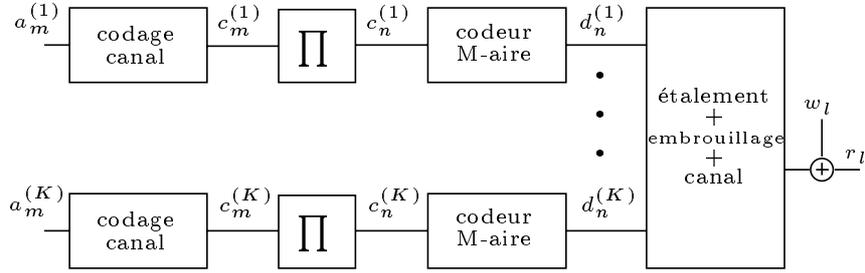
Comme dans le chapitre précédent, toutes les variables ont des indices n , qui font référence au temps et des exposants p relatifs à l'itération du système Turbo. Nous rajoutons maintenant un exposant entre parenthèses (k) pour le numéro de l'utilisateur.

5.3.1 Modèle CDMA sur canal multitrajets, asynchrone et gaussien

Nous modélisons ici la liaison montante d'un système multi-utilisateurs CDMA avec codage de canal. Ainsi, K utilisateurs asynchrones transmettent sur des canaux sélectifs en fréquence, qui sont en général différents entre eux (cf. Figure 5.1).

Pour chaque utilisateur k , les bits d'information $a_m^{(k)}$ sont tout d'abord codés par un code de rendement $R_c^{(k)}$, puis entrelacés (cf. Section 1.6). Sans perte de généralité, nous considérons que tous les codes et entrelaceurs sont égaux et le rendement des codes est noté R_c . Enfin, le convertisseur binaire M-aire fournit une séquence de symboles $d_n^{(k)}$ appartenant à un alphabet de taille finie M (alphabet binaire ici) et ce au rythme symbole noté $1/T_s$.

Dès lors, nous considérons le système DS-CDMA *Direct Sequence CDMA*, où l'étalement est

FIG. 5.1 – Modélisation du signal reçu (Π : entrelaceur)

effectué grâce à une signature, qui module les symboles émis. La contribution de l'utilisateur k est donc la séquence des symboles modulée par une signature de longueur Q , que nous supposons invariante au cours du temps, et s'écrit :

$$\sum_n d_n^{(k)} s^{(k)}(t - nT_s), \text{ où } s^{(k)}(t) = \sum_{q=0}^{Q-1} s_q^{(k)} \psi(t - qT_c).$$

La séquence de *chips* $\{s_q^{(k)}\}_{q=0, Q-1}$ constitue la signature de l'utilisateur k et est appelée aussi séquence d'étalement. Elle est émise, par construction, à un rythme chip $1/T_c$ plus élevé que le rythme symbole $1/T_s$. Nous définissons dès lors le facteur d'étalement Q comme le rapport entre ces deux rythmes :

$$Q = T_s/T_c$$

supposé entier. ψ est la fonction de mise en forme d'un chip et a pour durée T_c . C'est en général un filtre de demi-Nyquist. Le signal reçu en bande de base contient les contributions de tous les utilisateurs et s'écrit :

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{k=1}^K \sum_n \tilde{g}^{(k)} \star (d_n^{(k)} s^{(k)}(t - nT_s)) + w(t) \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_n \sum_{q=0}^{Q-1} d_n^{(k)} s_q^{(k)} (\tilde{g}^{(k)} \star \psi)(t - qT_c - nT_s) + w(t), \end{aligned}$$

où le canal de transmission de l'utilisateur k est caractérisée par sa réponse impulsionnelle :

$$g^{(k)}(t) = \tilde{g}^{(k)} \star \psi(t).$$

$g^{(k)}(t)$ contient tous les filtres dits d'équipement, le coefficient relatif au contrôle de puissance effectué à l'émission, le filtre d'émission $\psi(t)$ et son filtre adapté placé à la réception. $g^{(k)}(t)$ contient également tous les effets de propagation (multitrajets, retards). Échantillons le au rythme chip $Q/T_s (= 1/T_c)$ et nous obtenons le modèle discret du signal reçu :

$$r_l = r(lT_c) = \sum_{k=1}^K \sum_n \sum_{q=0}^{Q-1} d_n^{(k)} s_q^{(k)} (g^{(k)} \star \psi)((l - q)T_c - nT_s) + w_l, \quad (5.1)$$

qui est un signal cyclostationnaire de période Q . Nous considérons Q échantillons (au temps chip) par symbole. Comme dans le cas mono-utilisateur (cf. Section 2.2.3), il est légitime de se demander si ce modèle discret constitue un ensemble de statistiques suffisantes. Dans le cas asynchrone, [72, page 168] montre que les statistiques suffisantes sont obtenues en sortie du filtre adapté (analogique), qui tient compte des retards, et après échantillonnage au rythme chip.

Dans le cas multitrajets, la connaissance analogique du canal de transmission est un problème trop complexe, aussi nous préférons la technique, qui consiste à échantillonner le signal reçu et à estimer ensuite le canal de transmission discret. Cette opération peut occasionner une perte d'information, sauf dans le cas où le canal de transmission analogique a des trajets et des retards (entre utilisateurs) espacés exactement d'un multiple d'un temps chip.

Nous résumons étalement et convolution par le canal dans une fonction globale :

$$b_l^{(k)} = \sum_{q=0}^{Q-1} s_q^{(k)} g^{(k)}((l-q)T_c) = s^{(k)} \star g^{(k)}(lT_c). \quad (5.2)$$

Nous déduisons de (5.1) et (5.2) :

$$r_l = \sum_{k=1}^K \sum_n d_n^{(k)} b_{l-nQ}^{(k)} + w_l.$$

Dans toute la suite du chapitre, nous utilisons un système de transmission CDMA par bloc comme dans [39]. La contribution de chaque utilisateur est composée de N symboles et toutes les contributions forment le vecteur :

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}^{(1)T}, \mathbf{d}^{(2)T} \dots \mathbf{d}^{(k)T} \dots \mathbf{d}^{(K)T}]^T \text{ où } \mathbf{d}^{(k)} = [d_1^{(k)}, d_2^{(k)} \dots d_N^{(k)}]^T. \quad (5.3)$$

Les échantillons de la réponse impulsionnelle globale $b_l^{(k)}$ forment le vecteur $\mathbf{b}^{(k)}$ de taille $(Q+W-1)$, où W est la taille des canaux discrets globaux au temps chip :

$$\mathbf{b}^{(k)} = [b_1^{(k)}, b_2^{(k)} \dots b_l^{(k)} \dots b_{Q+W-1}^{(k)}]^T.$$

Dès lors, la transmission de la séquence de symboles $\mathbf{d}^{(k)}$ sur le canal CDMA s'écrit :

$$\mathbf{r} = [r_1 \dots r_{QN+W-1}]^T = \sum_{k=1}^K \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \mathbf{w}, \quad (5.4)$$

où \mathbf{r} est la séquence reçue, et $\mathbf{H}^{(k)}$ est une matrice de taille $(QN+W-1, N)$. L'équation (5.4) peut alors s'écrire :

$$\mathbf{r} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xrightarrow{N} & & \xleftarrow{N} \\ \mathbf{H}^{(1)} & \dots & \mathbf{H}^{(K)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(K)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} + \mathbf{w} = \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{w}, \quad (5.5)$$

$$\text{où } \mathbf{H}^{(k)} = [\mathbf{h}_1^{(k)} \dots \mathbf{h}_N^{(k)}],$$

$$\mathbf{h}_n^{(k)} = [0 \dots 0 \quad b_1^{(k)} \quad \dots \quad b_{Q+W-1}^{(k)} \quad 0 \dots 0]^T. \quad (5.6)$$

\uparrow \uparrow
 $(n-1)Q+1$ $nQ+W$

Nous supposons que le canal ajoute un bruit additif blanc gaussien $\{w_l\}$ ($l=1 \dots QN+W-1$) de variance σ_w^2 . Pour des questions de simplicité, nous supposons que les canaux de propagation sont invariants sur l'intervalle de temps d'un bloc de symboles et que les symboles avant et après le bloc utile \mathbf{d} sont connus. Aussi, l'interférence dus à ces symboles peut être parfaitement éliminée *i.e.* dans notre modèle nous pouvons considérer ces symboles connus égaux à zéro. Selon ces hypothèses, les colonnes de la matrice $\mathbf{H}^{(k)}$ diffèrent seulement d'un décalage temporel égal

à une durée symbole soit exactement Q chips (de par l'invariance temporelle) et les premiers et derniers vecteurs ne sont pas tronqués (grâce à la complète élimination de l'interférence due aux symboles connus). Cependant le modèle (5.5) est encore plus général et peut contenir plus de différences entre les colonnes de \mathbf{H} , dues par exemple à l'embrouillage comme dans la norme UMTS.

5.3.2 Problème de la détection multi-utilisateurs et du décodage conjoints

Considérons la chaîne de transmission présentée Figure 5.1 et modélisée en (5.5). Notons $\{a_m^{(k)}\}_{m,k}$ le bloc contenant les séquences de bits d'information de tous les utilisateurs. Dès lors, nous pouvons définir le problème de la détection multi-utilisateurs et du décodage conjoints.

Définition :

Résoudre le problème de la détection multi-utilisateurs et du décodage conjoints, c'est trouver les séquences de bits d'information $\{a_m^{(k)}\}_{m,k}$ les plus probables, connaissant les échantillons reçus \mathbf{r} , *i.e.* les séquences $\{a_m^{(k)}\}_{m,k}$ qui maximisent la probabilité *a posteriori*:

$$\mathcal{P}(\{a_m^{(k)}\}_{m,k} | \mathbf{r}) = \frac{\mathcal{P}(\{a_m^{(k)}\}_{m,k})}{\mathcal{P}(\mathbf{r})} \mathcal{P}(\mathbf{r} | \{a_m^{(k)}\}_{m,k}).$$

Notons que les détecteurs multi-utilisateurs supposent que les bits d'information et les symboles émis $d_n^{(k)}$ sont i.i.d. Comme pour le cas mono-utilisateur, l'hypothèse relative à $d_n^{(k)}$ est en général fautive, notamment lorsque les symboles résultent d'un codage de canal. L'intérêt d'une approche conjointe en détection repose sur le fait que les hypothèses sur $d_n^{(k)}$ sont moins fortes que dans le problème de la détection (sans décodage). En effet, dans ce cas, la seule hypothèse nécessaire concerne les bits d'information, qui sont supposés iid et équiprobables. Avec cette hypothèse et parce que $\mathcal{P}(\mathbf{r})$ apparaît dans tous les termes de la maximisation, le problème de la détection multi-utilisateurs et du décodage conjoints au sens du Maximum *a posteriori* est équivalent à la maximisation de la vraisemblance :

$$\mathcal{P}(\mathbf{r} | \{a_m^{(k)}\}_{m,k}). \quad (5.7)$$

[26] propose le récepteur optimal au sens du critère (5.7) dans le cas d'une transmission asynchrone mais sans multitrajets. De plus, l'émetteur ne contient pas d'entrelaceur. La complexité de cet algorithme, malgré ces hypothèses qui tendent à la réduire, le rend inapplicable dans le cas qui nous intéresse. En effet, [26] utilise un « Super-treillis » contenant le code et le canal CDMA asynchrone, d'où une complexité exponentielle en la longueur de contrainte du code et en le nombre d'utilisateurs. De par sa trop grande complexité, ce récepteur ne peut être mis en œuvre. Aussi, différentes solutions sous-optimales sont envisagées.

Ainsi, [27] propose d'égaliser (avec une sortie pondérée) et de décoder le premier utilisateur, puis de retirer sa contribution à l'aide d'un DFE multi-étages. L'opération est recommencée avec le deuxième utilisateur et ainsi de suite. Ainsi, cette approche propose d'intégrer le décodage à l'étape d'égalisation. Cependant, de par la nature (DFE) de l'égaliseur, seules les interférences dues aux utilisateurs précédemment détectés peuvent être supprimées.

Ici encore, les méthodes « Turbo » semblent très prometteuses car dès le second étage, les interférences annulées sont celles dues à tous les autres utilisateurs ainsi qu'aux symboles de l'utilisateur d'intérêt (hormis le symbole courant). Ce sont donc ces méthodes que nous allons

analyser plus loin. Tout d'abord rappelons quelques résultats relatifs au rapport signal à bruit, dans le cas d'une transmission CDMA.

5.3.3 Conditions de simulation et définition

Dans la suite du chapitre, nous présentons différentes méthodes Turbo-CDMA. Ces méthodes sont évaluées grâce à leurs performances *i.e.* le taux d'erreur binaire en fonction du rapport signal à bruit. Pour permettre des comparaisons, nous proposons ci-dessous un rapport signal à bruit indépendant des codes, des canaux de transmission et de la technique d'accès multiple utilisée.

L'effet du code sur le rapport signal à bruit a déjà été étudié (cf. Section 1.4.1). Nous nous intéressons maintenant à l'effet de l'étalement.

Le but de notre développement est d'écrire le rapport signal à bruit de la transmission CDMA en fonction des caractéristiques d'une transmission équivalente d'un seul utilisateur sur un canal BABG, transmission équivalente que nous précisons ci-dessous. Rappelons tout d'abord la définition du rapport signal à bruit de la transmission CDMA. Il s'exprime en fonction de l'énergie d'un chip E_c et de la densité spectrale de bruit N_0 :

$$RSB = \frac{E_c}{N_0},$$

où N_0 est tel que :

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{T_c}. \quad (5.8)$$

Considérons maintenant la transmission équivalente d'un seul utilisateur sur un canal à bruit additif blanc gaussien. Ainsi, un seul utilisateur émet des symboles d'énergie E_d sur un canal BABG de densité spectrale de bruit N'_0 . Nous définissons ci-dessous l'équivalence entre la transmission CDMA et celle d'un seul utilisateur sur canal BABG, avec les caractéristiques précisées plus haut. Ces deux systèmes de transmission sont équivalents ssi E_c et N_0 sont obtenus après étalement de symboles utiles d'énergie E_d et soumis à un bruit (non-étalé) de densité spectrale de puissance N'_0 , où

$$\sigma_d^2 = \frac{E_d}{T_s}. \quad (5.9)$$

Cette définition nous permet d'exprimer E_c et N_0 en fonction de E_d et N'_0 . Or, l'opération d'étalement agit uniquement sur les données utiles et non sur le bruit. Nous en déduisons :

$$N'_0 = N_0. \quad (5.10)$$

D'après les équations qui résument étalement et convolution par le canal CDMA (5.2) et en supposant les symboles $d_n^{(k)}$ indépendants, nous obtenons :

$$\frac{E_c}{T_c} = \|s^{(k)} \star g^{(k)}(t)\|^2 \frac{E_d}{T_s}.$$

D'après la définition de $\mathbf{h}_n^{(k)}$ (5.6) :

$$\frac{E_c}{T_c} = \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 \frac{E_d}{T_s}.$$

Nous en déduisons directement :

$$E_c = E_d \frac{\|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2}{Q}. \quad (5.11)$$

Si le canal est non dispersif en temps, nous obtenons $\|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 = Q$. Ainsi, $E_d = E_c$, ce qui signifie que l'étalement s'opère à énergie utile constante. Notons qu'en général, si la séquence d'étalement est centrée :

$$\|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 = \|s^{(k)} \star g^{(k)}(t)\|^2 \leq \|s^{(k)}\|^2 \|g^{(k)}\|^2 = Q \|g^{(k)}(t)\|^2.$$

Ainsi, si g est normalisée, nous avons $E_c \leq E_d$ *i.e.* l'étalement peut conduire à une perte de l'énergie moyenne utile. Lorsque nous présentons les performances des égaliseurs, nous souhaitons tester leur capacité à éliminer les interférences. Aussi, pour ne pas pénaliser les performances à cause d'une perte d'énergie résultant de l'étalement, nous choisissons de tenir compte de cette éventuelle perte, en poursuivant les simulations à E_c/N_0 et en les représentant en fonction de E_d/N_0 .

Pour résumer, l'opération d'étalement peut être représentée par la Figure 5.2. Avant étalement le symbole d d'énergie E_d occupe la bande $1/T_s$ et est soumis à un bruit de densité spectrale de puissance N_0 . Puis, après étalement nous obtenons une séquence de chips, où chaque chip a pour énergie E_c (avec $E_c \leq E_d$) mais occupe la bande $1/T_c$ et est soumis à un bruit de même densité spectrale.

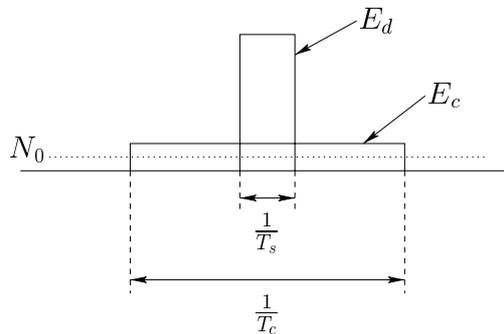


FIG. 5.2 – Etalement de spectre et effet sur l'énergie d'un symbole.

Avec les définitions des puissances moyennes (5.8) et (5.9) et avec les résultats de l'opération d'étalement (5.10) et (5.11), le rapport signal à bruit de la transmission CDMA devient :

$$RSB_{\text{CDMA}} = \frac{E_c}{N_0} = \frac{\|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2}{Q} \frac{E_d}{N_0} = \frac{\|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 \sigma_d^2}{\sigma_w^2}, \quad (5.12)$$

et il lui correspond le rapport signal à bruit de la transmission équivalente BABG d'un seul utilisateur

$$RSB_{\text{équivalent}} = \frac{E_d}{N_0}. \quad (5.13)$$

Ainsi, nous choisissons de représenter les performances des égaliseurs opérant à RSB_{CDMA} en fonction de $\frac{E_d}{N_0}$.

De plus, à ce rapport signal à bruit de la transmission équivalente correspond un rapport signal à bruit dit utile (*i.e.* relatif aux bits d'information). Soit E_b l'énergie d'un bit d'information, M la taille de l'alphabet des symboles $d_n^{(k)}$ et R_c le rendement des codes. Les énergies vérifient $E_d = \log_2(M) R_c^{(k)} E_b$ (cf. [56, pages 396, 487] et Section 1.4.1) et :

$$RSB(\text{utile}) = \frac{E_b}{N_0} = \frac{E_d}{N_0} \frac{1}{\log_2(M) R_c}. \quad (5.14)$$

Aussi, une simulation opérée à RSB_{CDMA} fournit après décodage un certain TEB, qui sera représenté en fonction du rapport signal à bruit utile (5.14).

Aussi, dans toutes les simulations de ce chapitre, les performances seront représentées en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ défini équation (5.14). Pour tous les utilisateurs, nous utilisons un code convolutif de rendement $R_c = \frac{1}{2}$, systématique avec 64 états et des polynômes générateurs (133,171) [56, page 493]. L'entrelaceur est une matrice non-uniforme de taille (64, 64) [18, 43]. La modulation est binaire (BPSK). Les séquences d'étalement sont orthogonales et sont plus particulièrement les séquences OVSF *orthogonal variable spreading factor codes* comme dans le cas de la norme UMTS. L'étalement est directement suivi par l'embrouillage étalé sur 16 chips. Ici encore, nous nous conformons à la norme UMTS-TDD : l'embrouillage est ici le même pour tous les utilisateurs de la même cellule. Le nombre d'utilisateurs est fixé à 4 et le facteur d'étalement à $Q = 16$. Le canal multitrajets s'étale sur $W = 14$ chips, aussi l'interférence entre symboles s'étale sur au moins 2 symboles. De plus, les utilisateurs sont asynchrones. Les résultats ont été obtenus avec 10^5 bits d'information.

5.4 Récepteur Turbo-CDMA

Les récepteurs Turbo-CDMA en tant que solution du problème de la détection multi-utilisateurs et du décodage conjoints bénéficient d'un intérêt tout particulier car tout comme la Turbo-détection et la Turbo-égalisation (cf. Section 3.4), ils peuvent offrir un bon compromis entre complexité et performances.

Le principe Turbo (cf. Section 3.4) peut être appliqué de différentes manières au cas d'une transmission multi-utilisateurs telle que le CDMA. Ainsi, [35, 59] proposent une première structure Turbo-CDMA, qui généralise le Turbo-détecteur de [20] au cas d'une transmission CDMA synchrone (aux temps chip et symbole). Puis, le cas d'une transmission asynchrone est envisagée dans [1]. Le détecteur CDMA utilisé dans [59, 1] étant de grande complexité, une simplification avec l'algorithme- M est envisagée dans ces deux cas.

Puisque dans notre contexte de travail, nous considérons la liaison montante avec des canaux multitrajets, ces méthodes Turbo-CDMA avec pour égaliseur un détecteur ne peuvent être envisagées. En effet, la présence de multitrajets augmenteraient significativement une complexité déjà importante car exponentielle en le nombre d'utilisateurs. Aussi, dans la suite, nous proposons un récepteur Turbo-CDMA généralisant le Turbo-égaliseur de [43] au cas d'une transmission CDMA. Il a été présenté dans [62]. Notons que des versions similaires pour les itérations $p > 1$ ont été proposées. Ainsi, [34] l'applique dans le cas d'une transmission CDMA synchrone et sans multitrajets mais avec des séquences d'étalement aléatoires (ce qui engendre de l'interférence entre utilisateurs). Puis, [36] applique la même structure dans le cas de la liaison descendante.

Dans un premier temps, nous présentons la structure de base Turbo-CDMA (cf. Sections 5.4.1). Puis, nous détaillons les égaliseurs (Section 5.4.2 et 5.4.3), en proposant de nouveaux. Pour ces égaliseurs, nous définirons ensuite un nouvel ordre de démodulation des utilisateurs, notamment pour les DFE. Enfin, nous proposerons une amélioration de la structure de base et ce relativement à la structure (cf. [63] et Section 5.4.5).

5.4.1 Principe

Nous présentons maintenant un premier récepteur Turbo-CDMA, tel que nous l'avons proposé dans [62, 65].

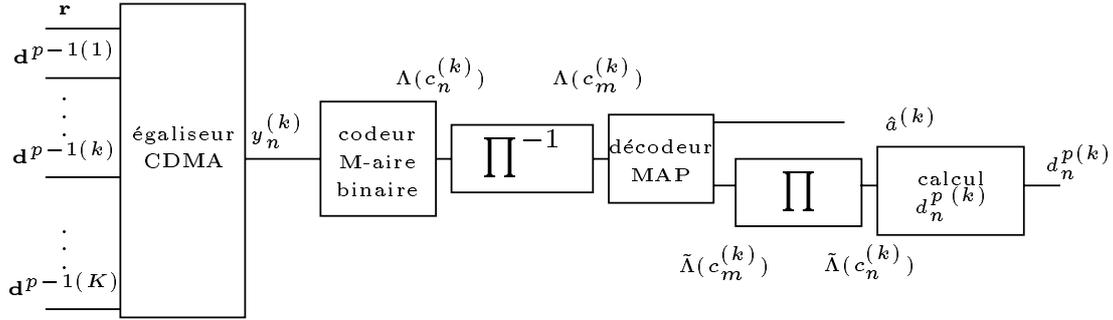


FIG. 5.3 – Itération p : module du récepteur Turbo-CDMA pour l'utilisateur k
(Π : entrelaceur, Π^{-1} : désentrelaceur)

Le récepteur Turbo-CDMA comme le Turbo-égaliseur est composé de p itérations. A l'intérieur d'une itération particulière p , le récepteur comprend K modules relatifs à chacun des K utilisateurs. Un de ces modules est représenté Figure 5.3, pour l'utilisateur d'intérêt k . Tous les modules fonctionnent en parallèle. Chaque module de ce récepteur est composé d'un égaliseur CDMA à entrée et sortie pondérées, d'un désentrelaceur, d'un décodeur à entrée et sortie pondérées et d'un entrelaceur. Ces K sorties de l'itération p alimentent alors, avec les échantillons reçus du canal \mathbf{r} , chacun des modules de l'itération suivante. Ainsi, l'utilisateur k dispose d'une information relative à tous les utilisateurs et la méthode, de ce fait, est bien multi-utilisateurs.

Si, en revanche, l'utilisateur d'intérêt utilise seulement une information relative à lui-même, la méthode est dite mono-utilisateur. Puisque nous considérons le contexte difficile de la liaison montante, l'approche multi-utilisateurs est la plus appropriée. Cependant, nous présenterons tout de même l'approche mono-utilisateur, en guise de comparaison.

Explicitons maintenant les différentes étapes d'un module (cf. Figure 5.3). Comme dans le cas du Turbo-égaliseur (cf. Section 3.5), la sortie de l'égaliseur est approximée par une distribution gaussienne de moyenne $\beta_n^{(k)} c_n^{(k)}$ et de variance σ_ξ^2 :

$$y_n^{(k)} = \beta_n^{(k)} d_n^{(k)} + \xi_n^{(k)}.$$

Avec les hypothèses classiques (modulation binaire, indépendance et modélisation gaussienne), le décodeur de l'utilisateur k est alimenté par le logarithme du rapport de vraisemblance :

$$\Lambda(c_n^{(k)}) = \ln \frac{\mathcal{P}(y_n^{(k)} | c_n^{(k)} = 1)}{\mathcal{P}(y_n^{(k)} | c_n^{(k)} = 0)} = \ln \frac{\mathcal{P}(y_n^{(k)} | d_n^{(k)} = 1)}{\mathcal{P}(y_n^{(k)} | d_n^{(k)} = -1)} = \frac{4}{\sigma_\xi^2} \Re\{y_n^{(k)} \beta_n^{(k)*}\}.$$

Puis, le décodeur MAP [3] fournit une estimation au sens du MAP des bits d'information $\hat{a}_m^{(k)}$ et calcule une information pondérée sur les bits codés sous la forme d'un rapport de probabilités *a posteriori* exactement comme dans le cas mono-utilisateur mais pour chaque utilisateur k . On obtient donc $\tilde{\Lambda}(c_m^{(k)})$, dont on déduit $d_n^{p(k)}$.

La stabilité de la boucle retour est assurée car les données $d_n^{p(k)}$ sont bornées. En effet, $d_n^{p(k)}$ est une somme de symboles de la constellation et pondérée par des coefficients strictement inférieurs à 1. [36] montre que est bornée en exprimant $d_n^{p(k)}$ en fonction de la tangente hyperbolique \tanh . Explicitons maintenant l'égaliseur CDMA utilisé.

5.4.2 Egaliseur de l'itération 1

Notons qu'à la première itération $d_n^{0(k)}$ n'est pas accessible, aussi nous devons utiliser un égaliseur classique.

Suivant le même raisonnement que dans le cas mono-utilisateur, nous choisissons dans un premier temps d'utiliser des égaliseurs de type DFE plutôt que linéaires comme dans [34, 36, 78]. En effet, nous avons montré précédemment ([60] et Section 3.6) dans le cas du Turbo-égaliseur, que la première étape du récepteur Turbo est des plus importantes car elle détermine le déclenchement ou non de l'effet Turbo. De plus, meilleures sont les performances du tout premier égaliseur et plus tôt aura lieu le déclenchement (*i.e.* à un rapport signal à bruit plus faible).

Les égaliseurs DFE considérés ici minimisent une erreur quadratique moyenne. Cette EQM peut être calculée sur le bloc des symboles de tous les utilisateurs et nous obtenons le DFE proposé par Klein et Kaleb dans [39]. Nous proposons deux autres DFE minimisant une EQM pour un symbole puis pour un bloc de symboles d'un seul utilisateur et choisirons finalement le moins complexe des trois. Nous proposons également un DFE de type mono-utilisateur de manière à le comparer aux trois méthodes précédentes multi-utilisateurs.

5.4.2.1 DFE multi-utilisateurs et critère EQM symbole

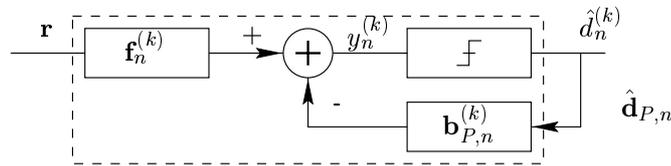


FIG. 5.4 – DFE multi-utilisateurs et critère EQM symbole

Considérons le DFE décrit Figure 5.4. Il représente l'état des vecteurs de l'égaliseur, lorsque celui-ci fournit l'estimation du symbole courant $d_n^{(k)}$ *i.e.* le $n^{\text{ième}}$ symbole de l'utilisateur d'intérêt k . Comme le DFE classique présenté Section 2.3.2.2 pour un seul utilisateur, il s'agit d'un égaliseur à deux entrées qui disposent des échantillons reçus après le canal \mathbf{r} mais aussi du passé de $d_n^{(k)}$. Si la notion de passé dans le cas d'un seul utilisateur est évidente, (c'est l'ensemble $\{d_m\}_{m < n}$) elle l'est moins ici. Le passé du symbole $d_n^{(k)}$ noté $\mathbf{d}_{P,n}$ est défini comme l'ensemble des symboles placés avant $d_n^{(k)}$ dans le vecteur \mathbf{d} défini en (5.3) :

$$\mathbf{d}_{P,n} = [d_1^{(1)} \dots d_N^{(1)} d_1^{(2)} \dots d_N^{(2)} \dots d_1^{(k)} \dots d_{n-1}^{(k)}]^T.$$

Notons que de par cette définition, nous imposons un ordre dans les utilisateurs, qu'il faudra choisir judicieusement. Nous aborderons ce problème dans la section 5.4.2.5. De même, nous définissons le futur du symbole $d_n^{(k)}$:

$$\mathbf{d}_{F,n} = [d_n^{(k)} \dots d_N^{(k)} d_1^{(k+1)} \dots d_N^{(k+1)} \dots d_1^{(K)} \dots d_N^{(K)}]^T.$$

De plus, le vecteur retour agit sur les symboles passés uniquement. Aussi l'optimisation des vecteurs avant et retour doit être réalisée en tenant de compte de la contrainte de causalité sur le vecteur retour. Pour ce faire, nous définissons le vecteur retour comme un vecteur d'horizon limité au passé du symbole courant :

$$\mathbf{b}_{P,n} = [b_1^{(1)} \dots b_N^{(1)} b_1^{(2)} \dots b_N^{(2)} \dots b_1^{(k)} \dots b_{n-1}^{(k)}]^T.$$

Fort de ces notations, la sortie pondérée de l'égaliseur vérifie :

$$y_n^{(k)} = \mathbf{f}_n^{(k)\dagger} \mathbf{r} - \mathbf{b}_{P,n}^{(k)\dagger} \hat{\mathbf{d}}_{P,n}.$$

Cherchons les expressions des vecteurs $\mathbf{f}_n^{(k)}$ et $\mathbf{b}_{P,n}^{(k)}$ qui minimisent l'erreur quadratique moyenne dite symbole :

$$E \left[|y_n^{(k)} - d_n^{(k)}|^2 \right].$$

Notons que les vecteurs $\mathbf{f}_n^{(k)}$ et $\mathbf{b}_{P,n}^{(k)}$ ne peuvent être invariants par décalage temporel car les supports des vecteurs changent pour chaque symbole) et donc ne vérifient pas de relations de filtrage.

Afin de poursuivre la minimisation, décomposons le vecteur selon les contributions passées et futures du symbole courant :

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}_{P,n} \mathbf{d}_{P,n} + \mathbf{H}_{F,n} \mathbf{d}_{F,n} + \mathbf{w},$$

où $\mathbf{H}_{P,n}$ est une matrice de taille $(QN+W-1, t-1)$, dont les $t-1$ colonnes sont les $t-1$ premières colonnes de \mathbf{H} et où $\mathbf{H}_{F,n}$ est une matrice de taille $(QN+W-1, KN-t+1)$, dont les $KN-t+1$ colonnes sont les $KN-t+1$ dernières colonnes de \mathbf{H} avec $t = (k-1)N + n$ l'indice du symbole courant :

$$\mathbf{H}_{P,n}(:, :) = \mathbf{H}(:, 1 : t-1), \quad \mathbf{H}_{F,n}(:, :) = \mathbf{H}(:, t : KN).$$

Nous supposons que les symboles sont i.i.d. et de matrice d'autocorrélation :

$$\mathbf{R}_d = \sigma_d^2 \mathbf{I}.$$

Sous l'hypothèse les symboles décidés sont exacts, on a :

$$\hat{\mathbf{d}}_{P,n} = \mathbf{d}_{P,n},$$

L'annexe B.1.1 effectue la minimisation et on obtient (B.11) :

$$\mathbf{b}_{P,n}^{(k)} = \sigma_d^2 \mathbf{H}_{P,n}^\dagger \left(\sigma_d^2 \mathbf{H}_{F,n} \mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \mathbf{R}_w \right)^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)}$$

$$\mathbf{f}_n^{(k)} = \sigma_d^2 \left(\sigma_d^2 \mathbf{H}_{F,n} \mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \mathbf{R}_w \right)^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)}$$

où \mathbf{R}_w est la matrice d'autocorrélation du bruit \mathbf{w} au rythme chip. Ainsi, le vecteur $\mathbf{f}_n^{(k)\dagger}$ applique le vecteur adapté au symbole courant via $\mathbf{h}_n^{(k)\dagger}$ (avec un terme correctif) puis, le vecteur retour $\mathbf{b}_{P,n}^{(k)\dagger}$ élimine les contributions des symboles du passé. Ainsi, après le retour, le signal contient les contributions du symbole courant, des symboles suivants et du bruit de la transmission de puissance exactement $(\sigma_d^2 \mathbf{H}_{F,n} \mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \mathbf{R}_w)$, ce qui représente le terme correctif.

Si le bruit au rythme chip est blanc et de puissance σ_w^2 :

$$\mathbf{b}_{P,n}^{(k)} = \sigma_d^2 \mathbf{H}_{P,n}^\dagger \left(\sigma_d^2 \mathbf{H}_{F,n} \mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \sigma_w^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)}$$

$$\mathbf{f}_n^{(k)} = \sigma_d^2 \left(\sigma_d^2 \mathbf{H}_{F,n} \mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \sigma_w^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)}$$

Rappelons, que nous nous intéressons ici aux algorithmes à faible complexité. Or ce DFE minimisant l'EQM nécessite une inversion de matrice de taille $(QN+W-1, QN+W-1)$ pour l'estimation de chaque symbole, ce qui rend la méthode trop complexe. Considérons maintenant des méthodes qui permettent de réduire la complexité.

5.4.2.2 DFE multi-utilisateurs et critère EQM bloc

Considérons maintenant le DFE proposé dans [39] et qui minimise une EQM définie pour un bloc complet de symboles :

$$E[\|\mathbf{y} - \mathbf{d}\|^2].$$

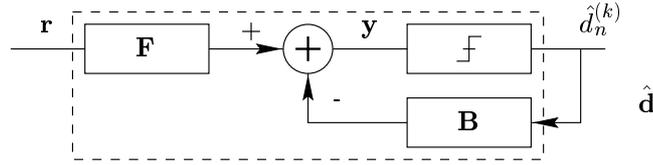


FIG. 5.5 – DFE multi-utilisateurs et critère EQM bloc

La sortie pondérée de l'égaliseur présenté Figure 5.5 s'exprime :

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{r} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{d}},$$

où $\hat{\mathbf{d}}$ est le résultat de la décision prise à partir de \mathbf{y} . Comme tout DFE, les données alimentant la boucle de retour sont relatives au passé du symbole courant. Aussi, pour respecter cette causalité, la matrice \mathbf{B} est contrainte à être strictement triangulaire (où strictement signifie que les termes diagonaux valent 0).

L'annexe B.1.2 effectue cette minimisation avec la contrainte que \mathbf{B} soit strictement triangulaire et avec l'hypothèse de données retournées exactes :

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}.$$

Nous obtenons :

$$\mathbf{B} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$$

$$\mathbf{F} = \Sigma^{-2}\mathbf{U}^{\dagger-1}\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{R}_w^{-1}$$

où \mathbf{U} et Σ résultent de la décomposition de Cholesky :

$$\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{R}_w^{-1}\mathbf{H} = (\Sigma\mathbf{U})^{\dagger}\Sigma\mathbf{U}.$$

La matrice \mathbf{F} blanchit le bruit de la transmission avec \mathbf{R}_w^{-1} puis applique la matrice adaptée \mathbf{H}^{\dagger} . Ici, le bruit est coloré de covariance égale à l'autocorrélation du canal $\mathbf{H}\mathbf{R}_d\mathbf{H}^{\dagger}$. Dans le cas d'un critère avec forçage à zéro, la matrice avant est la matrice adaptée blanchie [39]. Le blanchiment s'opérerait donc avec $\Sigma^{-1}\mathbf{U}^{\dagger-1}$, où $\mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{R}_w^{-1}\mathbf{H} = (\Sigma\mathbf{U})^{\dagger}\Sigma\mathbf{U}$. Or ce blanchiment compense les interférences dus aux symboles suivants le symbole courant et rehausse le niveau du bruit. Aussi, un compromis est réalisé avec le critère d'EQM en appliquant les matrices $\Sigma^{-1}\mathbf{U}^{\dagger-1}$, où $\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^{\dagger}\mathbf{R}_w^{-1}\mathbf{H} = (\Sigma\mathbf{U})^{\dagger}\Sigma\mathbf{U}$. Enfin, la matrice \mathbf{F} applique Σ^{-1} de manière à ce que les symboles soient recalés autour de la valeur du symbole courant.

Après application de la matrice \mathbf{F} , le signal contient de l'interférence due aux symboles du passé, qui est supprimée avec la matrice \mathbf{B} .

Dans le cas où les symboles émis par chaque utilisateur sont i.i.d., indépendant entre utilisateurs et de même puissance (le contrôle de puissance est contenu dans la matrice \mathbf{H}) et dans le cas où le bruit est blanc, les matrices de covariance deviennent $\mathbf{R}_d = \sigma_d^2\mathbf{I}$ et $\mathbf{R}_w = \sigma_w^2\mathbf{I}$ et l'on obtient :

$$\mathbf{B} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sigma_w^2}\Sigma^{-2}\mathbf{U}^{\dagger-1}\mathbf{H}^{\dagger}$$

où \mathbf{U} et $\mathbf{\Sigma}$ sont maintenant le résultat de la décomposition de Cholesky :

$$\sigma_w^{-2} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \sigma_d^{-2} \mathbf{I} = (\mathbf{\Sigma U})^\dagger \mathbf{\Sigma U}$$

Notons, que comme pour l'égaliseur DFE de critère EQM symbole, il existe ici une notion d'ordre entre les utilisateurs.

5.4.2.3 DFE multi-utilisateurs et critère EQM bloc d'utilisateur

Nous proposons maintenant un DFE à la complexité plus faible encore que les deux présentés précédemment. Ce DFE minimise une EQM calculée par rapport au bloc de symboles d'un seul utilisateur :

$$E[\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{d}^{(k)}\|^2],$$

où k fait référence à l'utilisateur d'intérêt. Nous pouvons dans ce cas utiliser une structure pour l'égaliseur légèrement différente comme le montre la Figure 5.6.

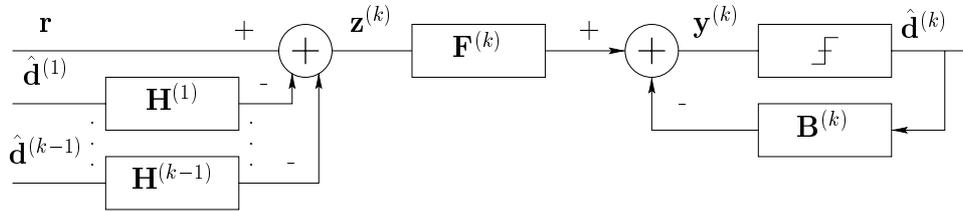


FIG. 5.6 – DFE multi-utilisateurs et critère EQM bloc d'utilisateur

Cette structure étend celle de la détection multi-utilisateurs par approche série en y incluant le décodage des utilisateurs. En effet, nous supposons que les utilisateurs précédents l'utilisateur k ont déjà été démodulés. Dans un premier temps, nous retirons les contributions de ces utilisateurs dits « passés » qui ont déjà été décodés une fois et sont donc plus fiables :

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r} - \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{H}^{(j)} \hat{\mathbf{d}}^{(j)}.$$

Puis nous cherchons les matrices optimales $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$ qui minimisent l'EQM bloc d'utilisateur, avec la contrainte que $\mathbf{B}^{(k)}$ soit strictement triangulaire :

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{B}^{(k)} \hat{\mathbf{d}}^{(k)}.$$

Pour ce faire, considérons encore une fois, que tous les symboles précédemment décidés sont exacts. Dès lors, l'entrée de la matrice $\mathbf{F}^{(k)}$ devient :

$$\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \sum_{j=k+1}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{d}^{(j)} + \mathbf{w} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \mathbf{n}.$$

Notons que dans cette écriture, les utilisateurs « futur » ($j > k$) sont considérés comme du bruit et participent à la matrice de covariance de bruit :

$$\mathbf{R}_n = E[\mathbf{nn}^\dagger] = \mathbf{R}_w + \sigma_d^2 \sum_{j=k+1}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{H}^{(j)\dagger}.$$

La minimisation est poursuivie dans l'annexe B.1.3 et nous obtenons :

$$\boxed{\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}} \quad \boxed{\mathbf{F}^{(k)} = \boldsymbol{\Sigma}^{-2} \mathbf{U}^\dagger^{-1} \mathbf{H}^{(k) \dagger} \mathbf{R}_n^{-1}} \quad (5.15)$$

où \mathbf{U} et $\boldsymbol{\Sigma}$ résultent de la décomposition de Cholesky :

$$\mathbf{R}_d + \mathbf{H}^{(k) \dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)} = (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U})^\dagger \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U}.$$

L'interprétation des matrices $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$ est la même que pour les matrices \mathbf{F} et \mathbf{B} de la Section 5.4.2.2. Dans le cas d'un bruit blanc, i.i.d. et de puissance σ_w^2 , il suffit de remplacer $\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$ dans l'expression de la matrice \mathbf{R}_n .

5.4.2.4 DFE mono-utilisateur et critère EQM bloc d'utilisateur

Avant d'étudier les performances et complexités des trois DFE multi-utilisateurs, nous nous intéressons à une méthode mono-utilisateur que nous comparerons aux méthodes multi-utilisateurs présentées ci-dessus. Le DFE mono-utilisateur vise à éliminer les interférences subies par l'utilisateur d'intérêt et utilise pour cela non plus une information relative aux symboles mêmes des autres utilisateurs mais uniquement une information sur leurs statistiques. Ce DFE est d'un intérêt particulier pour la liaison descendante pour laquelle chaque utilisateur doit assurer sa réception seul et sans la connaissance des symboles des autres utilisateurs.

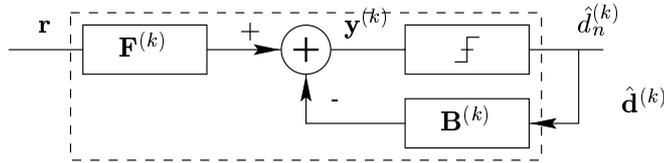


FIG. 5.7 – DFE mono-utilisateur et critère EQM bloc d'utilisateur

Ce DFE mono-utilisateur traite les échantillons reçus \mathbf{r} avec la matrice avant $\mathbf{F}^{(k)}$ et les données de l'utilisateur d'intérêt k précédemment décidées $\hat{\mathbf{d}}^{(k)}$ avec la matrice $\mathbf{B}^{(k)}$. Les données décidées sont forcément antérieures au symbole courant et la matrice $\mathbf{B}^{(k)}$ est contrainte à être strictement triangulaire. La sortie pondérée de l'égaliseur $\mathbf{y}^{(k)}$ s'écrit :

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{r} - \mathbf{B}^{(k)} \hat{\mathbf{d}}^{(k)}.$$

Les matrices $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$ minimisent l'EQM par bloc d'utilisateur : $E[\|\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{d}^{(k)}\|^2]$. La minimisation est poursuivie dans l'annexe B.2.1. Les matrices optimales sont :

$$\boxed{\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}} \quad \boxed{\mathbf{F}^{(k)} = \boldsymbol{\Sigma}^{-2} \mathbf{U}^\dagger^{-1} \mathbf{H}^{(k) \dagger} \mathbf{R}_n^{-1}}$$

où \mathbf{U} et $\boldsymbol{\Sigma}$ résultent de la décomposition de Cholesky :

$$\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^{(k) \dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)} = (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U})^\dagger \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{U},$$

et où \mathbf{R}_d est la matrice de covariance des symboles émis et \mathbf{R}_n la matrice de covariance du bruit :

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_w + \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^{(j) \dagger}.$$

Nous proposons ici encore la même interprétation des matrices $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$ que celle pour les matrices \mathbf{F} et \mathbf{B} de la Section 5.4.2.2.

Dans le cas d'un bruit blanc, i.i.d. et de puissance σ_w^2 , il suffit de remplacer $\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$ dans l'expression de la matrice \mathbf{R}_n .

5.4.2.5 Ordre de démodulation

Par construction des 4 DFE présentés ci-dessus, les données qui alimentent la boucle de retour sont estimées et présentent un certain taux d'erreur. Cependant, l'optimisation des matrices du DFE a toujours été faite avec l'hypothèse que les données retournées sont exactes. Aussi, puisque le DFE ne tient pas compte des éventuelles erreurs, cela provoque le célèbre problème de *propagation d'erreur*.

De plus, nous avons remarqué lors de la présentation des DFE multi-utilisateurs, qu'une relation d'ordre entre les utilisateurs apparaît naturellement. Notons qu'une approche populaire consiste à démoduler les utilisateurs dans l'ordre décroissant de leurs puissances reçues. Nous allons voir que cette approche n'est pas la plus appropriée, car elle ne tient pas compte des interférences.

Afin de réduire l'effet de propagation d'erreur, nous souhaitons démoduler en premier, l'utilisateur fournissant après égalisation le taux d'erreur le plus faible. Dans le cas synchrone et avec des séquences d'étalement pseudo-aléatoires, [72, page 345] propose un critère tenant compte de la puissance reçue mais aussi des intercorrélations entre utilisateurs. Nous proposons d'aller plus loin en considérant maintenant le cas d'une transmission multitrajets et asynchrone. Nous proposons alors de démoduler les utilisateurs dans l'ordre décroissant du critère (5.16) qui tient compte de la puissance reçue, de l'interférence entre symboles (IES) et de l'interférence multi-utilisateurs (MUI) due aux autres utilisateurs :

$$\sum_{n=1}^N \left(\underbrace{\mathbf{h}_n^{(k)\dagger} \mathbf{h}_n^{(k)}}_{\text{Puissance reçue}} - \underbrace{\sum_{m, m \neq n} |\mathbf{h}_n^{(k)\dagger} \mathbf{h}_m^{(k)}|}_{\text{IES}} - \underbrace{\sum_{j, j \neq k} \sum_m |\mathbf{h}_n^{(k)\dagger} \mathbf{h}_m^{(j)}|}_{\text{MUI}} \right). \quad (5.16)$$

(5.16) est donc la moyenne sur tous les symboles de l'utilisateur d'intérêt k de la puissance reçue de cet utilisateur moins la puissance des interférences, lorsque celles-ci sont toutes destructrices.

Considérons le terme à l'intérieur de la somme sur tous les symboles ($n = 1$ à N) et considérons la constellation en sortie du récepteur Rake et relative à l'utilisateur d'intérêt. Ce terme s'interprète comme la plus petite distance entre deux états du treillis et correspondant à deux symboles émis différents. Puis la somme réalise un moyennage de ces pires cas sur tous les symboles de la séquence émise.

Montrons maintenant l'intérêt de cet ordre de démodulation sur les performances du DFE.

5.4.2.6 Performances et complexité des égaliseurs DFE

Rappelons que la décomposition de Cholesky d'une matrice de taille (n, n) s'effectue en $O(n^3)$ opérations [17, page 98], comme l'inversion d'une matrice de même taille. Notons que dans les méthodes bloc (cf. Sections 5.4.2.2 et 5.4.2.3) une inversion de matrice triangulaire est effectuée, qui nécessite moins d'opérations qu'une inversion classique et dans ces deux méthodes

la complexité est donnée par la décomposition de Cholesky. Nous allons donc pouvoir comparer les complexités des trois méthodes.

Ainsi, nous avons présentés ici trois DFE multi-utilisateurs dans le cas d'une transmission multitrajets et asynchrone. Le premier minimise une EQM dite symbole (cf. Section 5.4.2.1) et nécessite $O((QN + W - 1)^3)$ opérations pour l'estimation d'un seul symbole. Le second DFE avec un critère symbole (cf. Section 5.4.2.2) nécessite $O((KN)^3)$ pour l'estimation de KN symboles. (Pour cet égaliseur, le calcul complet de la complexité est donné dans [42]). Enfin, le dernier DFE (cf. Section 5.4.2.3) nécessite quant à lui $O(N^3)$ opérations pour l'estimation de N symboles soit $O(KN^3)$ opérations pour l'estimation de KN symboles. De plus, comme ces trois DFE ont des comportements très similaires (cf. Figure 5.8), nous choisirons donc la solution la moins complexe à savoir le DFE avec critère EQM par bloc d'utilisateur.

Nous nous plaçons dans les conditions de simulation présentée Section 5.3.3, avec des utilisateurs de même puissance et un ordre arbitraire. Les Figures 5.8 et 5.9 montrent les performances des trois DFE multi-utilisateurs et du DFE mono-utilisateur. Force est de constater que les trois DFE multi-utilisateurs ont des comportements similaires. Nous considérerons dans la suite le DFE multi-utilisateurs avec un critère EQM défini pour un bloc d'utilisateur, *i.e.* le même critère que le DFE mono-utilisateur. Ainsi, pour le premier utilisateur démodulé, les méthodes multi et mono avec critère par bloc d'utilisateur sont strictement identiques d'un point de vue théorique et fournissent bien les mêmes performances (cf. Figures 5.8 et 5.9).

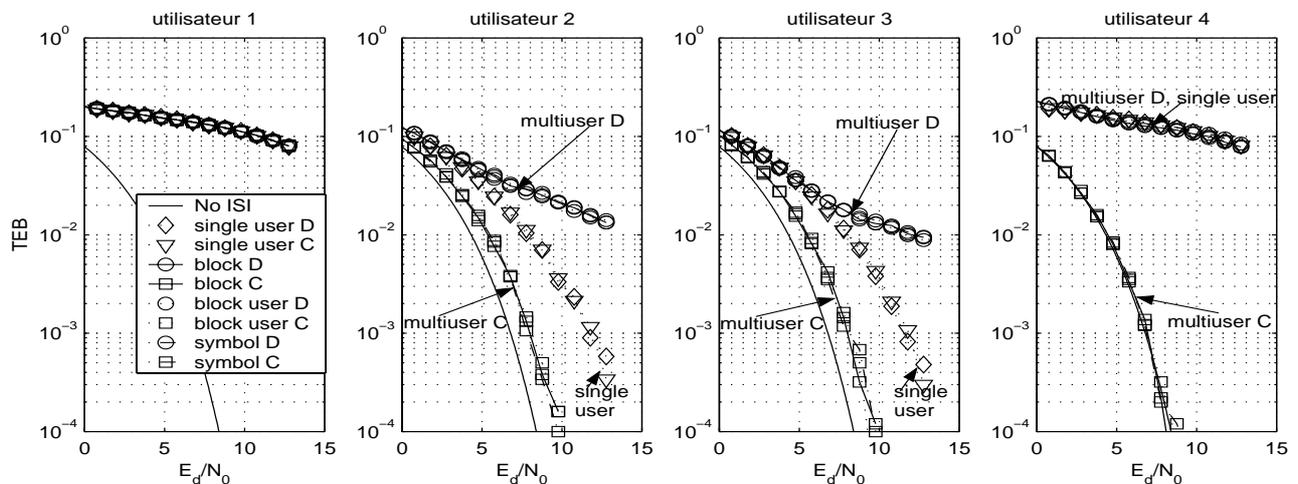


FIG. 5.8 – Performances des 3 DFE multi-utilisateurs et du DFE mono-utilisateur : C correspond au cas où les données retournées sont correctes et D au cas où elles sont décidées. Les utilisateurs sont démodulés dans l'ordre (1/2/3/4).

Selon nos conditions de simulation (cf. Section 5.3.3), tous les utilisateurs ont la même puissance reçue. Aussi selon l'approche usuelle, l'ordre de démodulation ne devrait pas influencer sur les performances, ce qui n'est pas le cas lorsque nous comparons les Figures 5.8 et 5.9. En effet, sur la Figure 5.8 les utilisateurs 2,3 et 4 sont démodulés après l'utilisateur 1, dont le taux d'erreur est très élevé. Ainsi, les erreurs de cet utilisateur 1 se propagent chez les autres utilisateurs, d'où une grande différence entre les performances optimales avec données exactes en trait plein et celles avec données décidées en pointillé (cette différence caractérise la propagation d'erreurs). Notons, que dans le cas du DFE mono-utilisateur il y a très peu de propagation d'erreurs. En effet, pour cette méthode, les erreurs propagées sont dues au seul utilisateur démodulé *i.e.* l'interférence est seulement entre symboles.

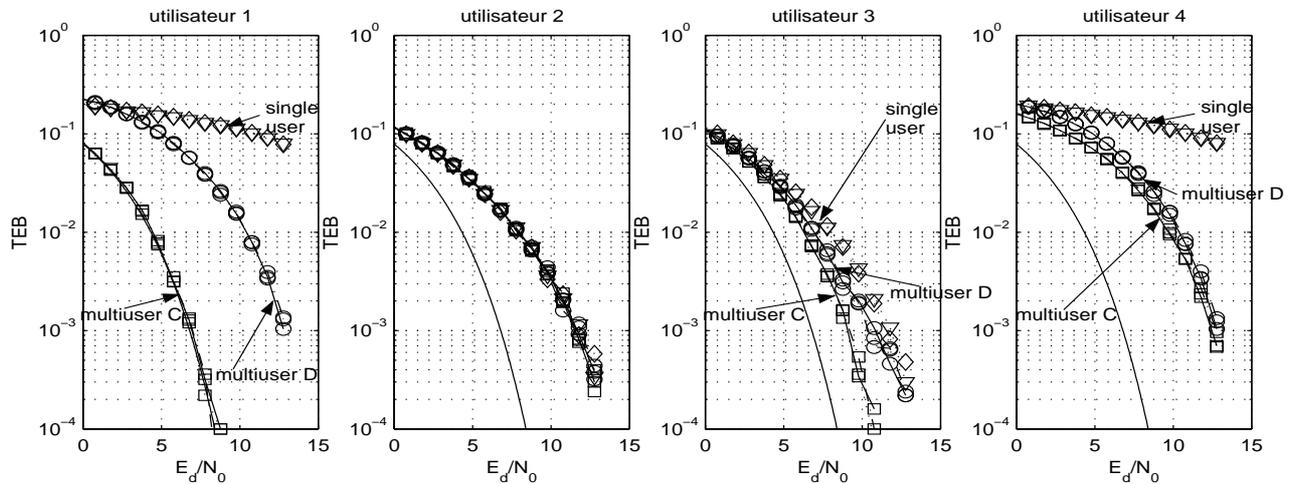


FIG. 5.9 – Performances des 3 DFE multi-utilisateurs et du DFE mono-utilisateur : C correspond au cas où les données retournées sont correctes et D au cas où elles sont décidées. Les utilisateurs sont démodulés dans l'ordre (2/3/4/1). Voir légende sur Figure 5.8.

Ainsi, lorsque les utilisateurs sont démodulés avec un critère qui ne dépend pas des interférences, le DFE multi-utilisateurs est très sensible au phénomène de propagation d'erreurs et le DFE mono-utilisateur fournit même de meilleures performances que le DFE multi-utilisateurs avec données décidées.

En revanche, dans le cas plus favorable où les utilisateurs sont démodulés selon le critère (5.16) (cf. Figure 5.9), le phénomène de propagation d'erreurs est alors moins important et la distance entre les performances avec données correctes ou décidées est plus faible. Le gain est très important (surtout pour l'utilisateur 3) et le DFE multi-utilisateurs devient alors meilleur que le DFE mono-utilisateur.

5.4.3 Egaliseur de l'itération $p > 1$

Après avoir présenté l'égaliseur de la première itération, nous pouvons maintenant présenter l'égaliseur des itérations suivantes. Nous l'appelons, comme dans [43], l'annuleur d'interférences. Il s'agit là de l'élément clé du récepteur Turbo-CDMA. En effet, il permet de supprimer les interférences non plus seulement entre symboles (Turbo-égalisation) mais aussi venant des autres utilisateurs et ce grâce aux données pondérées issues de l'itération précédente. La force de cet égaliseur réside en sa capacité à supprimer de l'interférence « passée » et « future » du symbole courant comme défini Section 5.4.2.1.

Nous proposons ici un premier annuleur d'interférences dit multi-utilisateurs car il utilise la connaissance de tous les autres symboles (et même en fait une information pondérée sur ces symboles) puis une méthode mono-utilisateur, où seule une connaissance des statistiques à l'ordre 2 est requise.

5.4.3.1 Annuleur d'interférences multi-utilisateurs

Comme en Turbo-égalisation, l'égaliseur utilisé dans le récepteur Turbo-CDMA à partir de la 2^{ième} itération est un annuleur d'interférences (AI). L'AI est un égaliseur à plusieurs entrées : d'une part, il traite les échantillons reçus \mathbf{r} et d'autre part, il dispose d'une information relative

cette fois aux symboles de tous les utilisateurs, car nous nous plaçons ici dans le contexte multi-utilisateurs. Cette information est issue de l'itération précédente et est notée $\mathbf{d}^{p-1(j)}$ avec $1 \leq j \leq K$. Considérons l'AI relatif à l'utilisateur d'intérêt k . La Figure 5.10 représente un tel AI, qui est composé d'une matrice avant $\mathbf{F}^{(k)}$ et d'un banc de matrices retour $\mathbf{B}_j^{(k)}$ avec $1 \leq j \leq K$.

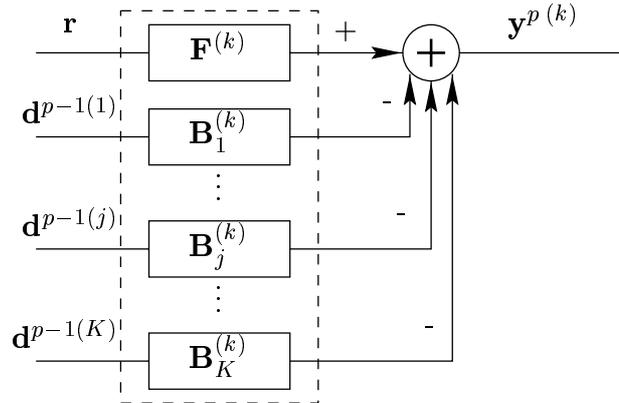


FIG. 5.10 – Annuleur d'interférences multi-utilisateurs.

La sortie pondérée de l'AI pour l'utilisateur k vérifie :

$$\mathbf{y}^p(k) = \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{r} - \sum_{j=1}^K \mathbf{B}_j^{(k)} \mathbf{d}^{p-1(j)}. \quad (5.17)$$

Les matrices $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}_j^{(k)}$ ($1 \leq j \leq K$) minimisent l'EQM de chaque symbole :

$$E[|y_n^{(k)} - d_n^{(k)}|^2].$$

La matrice $\mathbf{B}_k^{(k)}$ est contrainte à ne pas traiter les symboles courants et l'on suppose de plus que les données alimentant le banc de matrices sont exactes. Les matrices sont obtenues dans l'annexe C.1.1 :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1}, \\ \mathbf{B}_j^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \left(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}^{(j)} - \delta_{k-j} \text{diag}(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}^{(j)}) \right), \\ \mathbf{D}^{(k)} &= \text{Diag}(\alpha_1^{(k)} \dots \alpha_n^{(k)} \dots \alpha_N^{(k)}), \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\text{où } \alpha_n^{(k)} = \frac{1}{\sigma_d^{-2} + \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_w}^2}, \quad (5.19)$$

$$\text{où } \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_w}^2 = \mathbf{h}_n^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)},$$

et où δ_{k-j} est le symbole de Kronecker. Ainsi, la matrice avant n'est autre que la matrice adaptée à la matrice de la transmission CDMA $\mathbf{H}^{(k)}$ et le banc de matrices retour a pour rôle d'éliminer les interférences de tous les autres utilisateurs mais aussi des symboles passés et futurs de l'utilisateur d'intérêt. La supériorité de l'AI sur le DFE provient du fait que l'on peut annuler les contributions de tous les symboles. De plus, la stabilité du retour est assurée car les symboles retournés sont bornés, comme le montre [36] et cf. Section 5.4.1. Notons également, que les AI de chacun des utilisateurs agissent en parallèle et qu'il n'y a pas de notion d'ordre entre utilisateurs comme dans le cas du DFE.

Dans le cas où le bruit de la transmission \mathbf{w} est blanc et de matrice de covariance $\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$, les expressions des matrices deviennent :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{H}^{(k)\dagger}, \\ \mathbf{B}_j^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \left(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{H}^{(j)} - \delta_{k-j} \text{diag}(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{H}^{(j)}) \right), \\ \mathbf{D}^{(k)} &= \text{Diag}(\alpha_1^{(k)} \dots \alpha_n^{(k)} \dots \alpha_N^{(k)}), \end{cases}$$

$$\text{où } \alpha_n^{(k)} = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_d^2 \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 + \sigma_w^2}.$$

En supposant l'exactitude des données de retour $\mathbf{d}^{p-1(k)} = \mathbf{d}^{(k)}$, nous obtenons les performances asymptotiques de l'AI. Pour analyser ce cas, calculons la sortie pondérée de l'AI dans ce contexte à l'aide des expressions des matrices (5.18) et (5.19) :

$$y_n^{(k)} = \alpha_n^{(k)} (\|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 d_n^{(k)} + \xi_n^{(k)}), \text{ avec } \xi_n^{(k)} = \mathbf{h}_n^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{w}. \quad (5.20)$$

L'équation (5.20) montre que dans le cas idéal toutes les interférences ont été éliminées. Le bruit en sortie de l'AI a pour variance :

$$\sigma_\xi^2 = \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_w}^2,$$

et le rapport signal à bruit et interférences (RSBI) vaut :

$$RSBI_{MU}(y_n^{(k)}) = \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_w}^2 \sigma_d^2. \quad (5.21)$$

De plus, si le bruit de la transmission est blanc, la variance du bruit et le RSBI deviennent :

$$\sigma_\xi^2 = \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 \sigma_w^2, \quad RSBI_{MU}(y_n^{(k)}) = \frac{\|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 \sigma_d^2}{\sigma_w^2}.$$

Ainsi, avec l'hypothèse de données retournées exactes, le rapport signal à bruit et interférences est le même que le rapport signal à bruit de la transmission CDMA (5.12) qui correspond à celui d'une transmission équivalente d'un seul utilisateur sur un canal non dispersif et à bruit additif blanc gaussien (5.13). Aussi, le taux d'erreur après égalisation et celui de la transmission BABG d'un seul utilisateur sont les mêmes comme le montre la Figure 5.11. Comme dans le cas d'une transmission avec un seul utilisateur émis (cf. Figure 3.8), le bruit après l'égaliseur est coloré, ce qui pourrait gêner le décodeur MAP. Or, comme un désentrelaceur est placé avant le décodeur, le bruit des données alimentant le décodeur est plus ou moins décorrélié et les performances après décodage sont bien celles de la transmission à bruit additif gaussien. Nous analyserons plus loin (cf. Section 5.4.4) les performances du récepteur Turbo-CDMA sans l'hypothèse de données retournées exactes.

5.4.3.2 Annuleur d'interférences mono-utilisateur

Considérons maintenant, le contexte mono-utilisateur, qui nous servira de référence pour comparer avec les méthodes multi-utilisateurs (cf. Section 5.4.3.3). L'annuleur d'interférences dispose maintenant des échantillons reçus \mathbf{r} et d'une information relative aux symboles de l'utilisateur d'intérêt k , car nous nous plaçons ici dans le contexte mono-utilisateur. Cette information est issue de l'itération précédente et est notée $\mathbf{d}^{p-1(k)}$. La Figure 5.12 représente un tel AI, qui est composé d'une matrice avant $\mathbf{F}^{(k)}$ et d'une matrice retour $\mathbf{B}^{(k)}$.

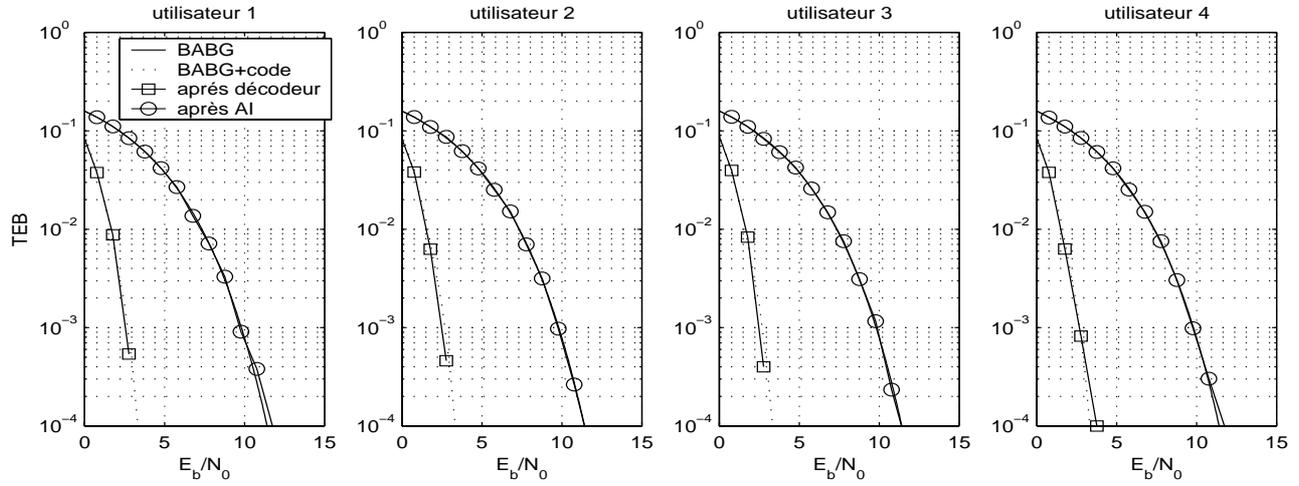


FIG. 5.11 – Performances de l'AI multi-utilisateurs avec données retournées correctes.

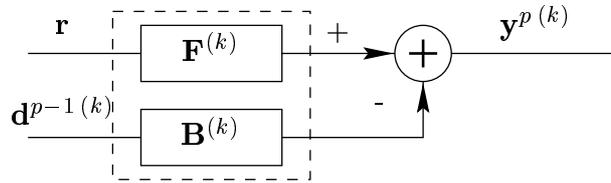


FIG. 5.12 – Annuleur d'interférences mono-utilisateur.

La sortie pondérée de cet AI vérifie :

$$\mathbf{y}^p(k) = \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{r} - \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{d}^{p-1}(k), \text{ avec } \mathbf{r} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{d}^{(j)} + \mathbf{w} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \mathbf{n}. \quad (5.22)$$

Ainsi, d'après (5.22), tous les autres utilisateurs sont considérés comme du bruit. Dans la suite nous supposons avoir connaissance de leurs propriétés statistiques au second ordre. Ceci nous permet de calculer la matrice de covariance du bruit \mathbf{n} , en supposant de plus que les symboles émis de tous les utilisateurs sont indépendants entre eux, i.i.d. de puissance σ_d^2 :

$$\mathbf{R}_n = E[\mathbf{n}\mathbf{n}^\dagger] = \sigma_d^2 \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{H}^{(j)\dagger} + \mathbf{R}_w. \quad (5.23)$$

Les matrices $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}_j^{(k)}$ ($1 \leq j \leq K$) minimisent l'EQM de chaque symbole :

$$E[|y_n^{(k)} - d_n^{(k)}|^2].$$

La matrice $\mathbf{B}_k^{(k)}$ est contrainte à ne pas traiter les symboles courants et l'on suppose de plus que les données alimentant le banc de matrices sont exactes. Les matrices sont obtenues dans l'annexe C.2.1 :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_n^{-1}, \\ \mathbf{B}^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \left(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)} - \text{diag}(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)}) \right), \\ \mathbf{D}^{(k)} &= \text{Diag}(\alpha_1^{(k)} \dots \alpha_n^{(k)} \dots \alpha_N^{(k)}), \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\text{où } \alpha_n^{(k)} = \frac{1}{\sigma_d^{-2} + \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_n}^2}, \quad (5.25)$$

$$\text{où } \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_n}^2 = \mathbf{h}_n^{(k)\dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)}.$$

Ainsi, la matrice avant n'est autre que la matrice adaptée à la matrice de la transmission CDMA $\mathbf{H}^{(k)}$ blanchie par \mathbf{R}_n^{-1} et la matrice retour a pour rôle d'éliminer les interférences dus aux symboles passés et futurs de l'utilisateur d'intérêt. Notons que dans notre méthode nous tenons compte des autres utilisateurs à travers la matrice de covariance de bruit \mathbf{R}_n .

Dans le cas où le bruit de la transmission \mathbf{w} est blanc et de matrice de covariance $\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$, les expressions des matrices sont inchangées, il suffit de remplacer dans l'expression de la matrice de covariance du bruit \mathbf{R}_n , \mathbf{R}_w par sa valeur.

En supposant l'exactitude des données de retour $\mathbf{d}^{p-1(k)} = \mathbf{d}^{(k)}$, nous obtenons les performances asymptotiques de l'AI. Pour analyser ce cas, calculons la sortie pondérée de l'AI dans ce contexte à l'aide des expressions des matrices (5.24) et (5.25) :

$$y_n^{(k)} = \alpha_n^{(k)} (\|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 d_n^{(k)} + \xi_n^{(k)}), \text{ avec } \xi_n^{(k)} = \mathbf{h}_n^{(k)\dagger} \mathbf{w}. \quad (5.26)$$

L'équation (5.26) montre que dans le cas idéal toutes les interférences ont été éliminées et le bruit en sortie de l'AI a pour variance :

$$\sigma_\xi^2 = \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_n}^2,$$

et le rapport signal à bruit et interférences (RSBI) vaut :

$$RSBI_{SU}(y_n^{(k)}) = \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_n}^2 \sigma_d^2. \quad (5.27)$$

Nous allons maintenant comparer ce résultat (5.27) à celui trouvé dans le cas multi-utilisateurs (5.21).

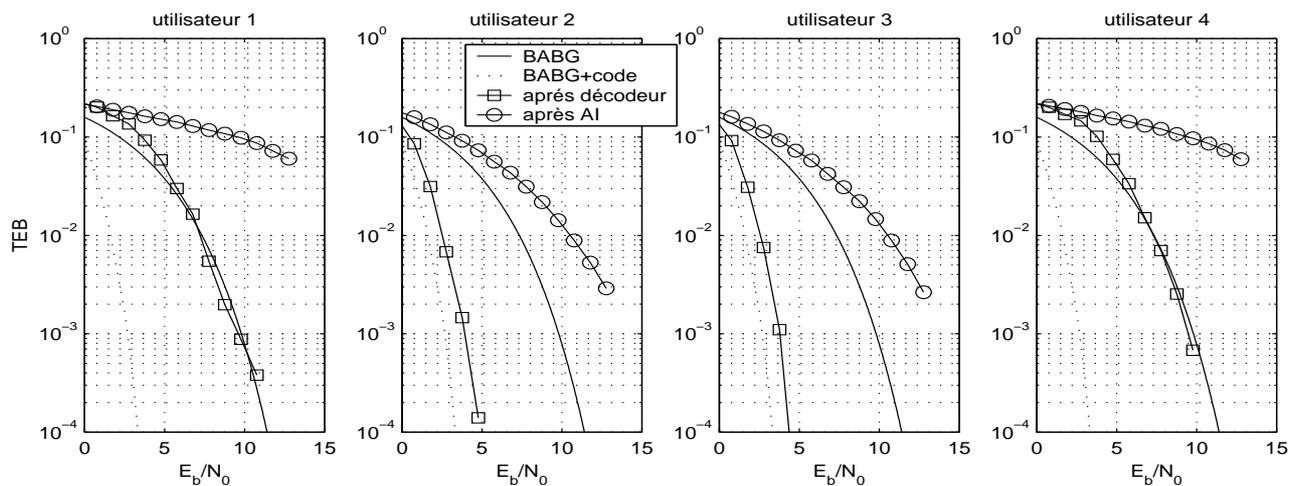


FIG. 5.13 – Performances de l'AI mono-utilisateur avec données retournées exactes.

5.4.3.3 Comparaisons des méthodes mono et multi-utilisateurs

Comparons maintenant le rapport signal à bruit et interférences (RSBI) du cas multi-utilisateurs (5.21) à celui du cas mono-utilisateur (5.27). Pour ce faire, calculons l'inverse de la matrice de covariance du bruit définie (5.23) en utilisant le lemme d'inversion matricielle ((B.16) :

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_w + \sigma_d^2 \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\mathbf{H}^{(1)} \dots \mathbf{H}^{(k-1)} \mathbf{H}^{(k+1)} \dots \mathbf{H}^{(K)}], \\ \mathbf{R}_n^{-1} &= \mathbf{R}_w^{-1} - \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{U} \left(\sigma_d^{-2} \mathbf{I} - \mathbf{U}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1}, \\ &= \mathbf{R}_w^{-1} - \mathbf{A}, \end{aligned}$$

où \mathbf{A} est par construction une matrice définie positive. Dès lors, les RSBI vérifient :

$$RSBI_{SU}(y_n^{(k)}) = \sigma_d^2 \mathbf{h}_n^{(k) \dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)} = \underbrace{\sigma_d^2 \mathbf{h}_n^{(k) \dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)}}_{RSBI_{MU}(y_n^{(k)})} - \sigma_d^2 \mathbf{h}_n^{(k) \dagger} \mathbf{A} \mathbf{h}_n^{(k)}.$$

Comme la matrice \mathbf{A} est définie positive, $\sigma_d^2 \mathbf{h}_n^{(k) \dagger} \mathbf{A} \mathbf{h}_n^{(k)} \geq 0$ et $RSBI_{SU}(y_n^{(k)}) \leq RSBI_{MU}(y_n^{(k)})$. Ce résultat est illustré sur la Figure 5.13, qui représente les performances de l'AI mono-utilisateur avec l'hypothèse que les données retournées sont exactes. La comparaison des Figures 5.13 et 5.11 montre clairement la supériorité de la méthode multi vis-à-vis de la méthode mono-utilisateur, comme l'annonçait notre calcul sur les RSBI.

5.4.4 Performances du récepteur Turbo-CDMA

Nous analysons tout d'abord le récepteur Turbo-CDMA multi-utilisateurs. Le principe général de ce récepteur a été présenté Section 5.4.1. Les études sur les égaliseurs nous ont permis de choisir celui qui réalise le meilleur compromis entre performances et complexité. Ainsi, nous avons choisi le DFE multi-utilisateurs optimisé selon un critère EQM calculé pour un bloc d'utilisateur. Enfin, aux itérations suivantes nous utilisons l'annuleur d'interférences tel qu'il a été défini Section 5.4.3.1. Les performances de ce récepteur avec les conditions de simulation définies Section 5.3.3 sont présentées Figure 5.14.

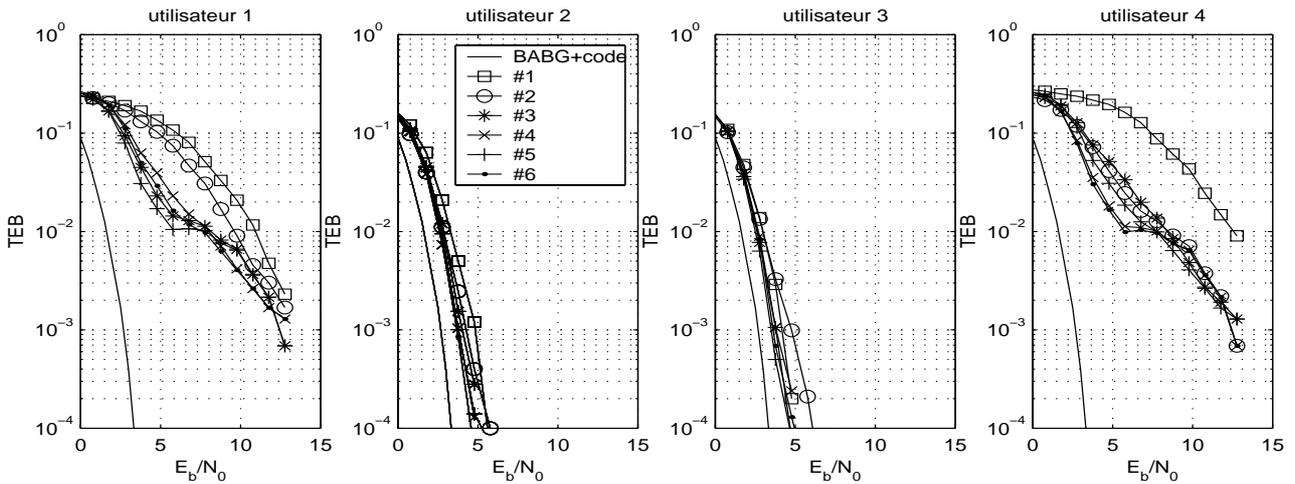


FIG. 5.14 – Performances du récepteur Turbo-CDMA multi-utilisateurs. Les utilisateurs sont démodulés dans l'ordre (1/2/3/4).

Comme dans le cas du Turbo-égaliseur, nous remarquons la présence d'un point de déclenchement à partir duquel les performances s'améliorent au fur et à mesure des itérations, ce qui marque le début du gain appelé *gain Turbo*. Nous avons vu précédemment qu'il était possible d'améliorer les performances du premier égaliseur en démodulant les utilisateurs dans l'ordre décroissant du critère défini en (5.16). Les performances du même récepteur Turbo-CDMA que précédemment mais avec ce bon ordre dans la démodulation des utilisateurs sont présentées Figure 5.15.

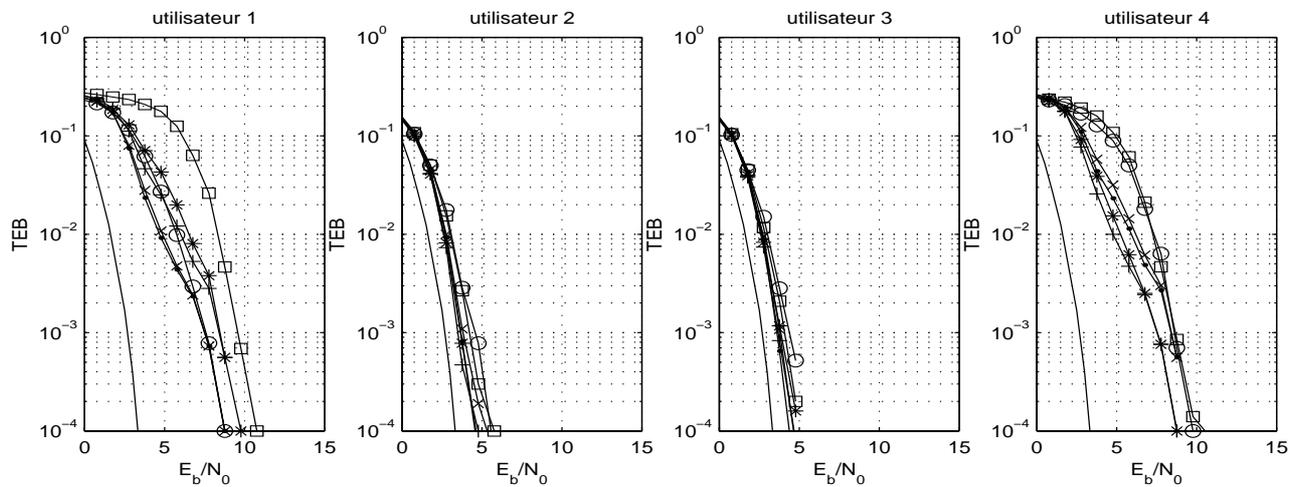


FIG. 5.15 – Performances du récepteur Turbo-CDMA multi-utilisateurs. Les utilisateurs sont démodulés selon le **meilleur** ordre: (2/3/4/1). Légende cf. Figure 5.15.

L'égaliseur de la première itération est des plus importants ici aussi (cf. Section 3.6) et détermine les performances asymptotiques du récepteur. Ainsi, le bon ordre de démodulation des utilisateurs améliore-t-il non seulement les performances du DFE mais aussi celles du récepteur complet Turbo-CDMA (comparaison des Figures 5.14 et 5.15).

Les performances du récepteur Turbo-CDMA mono-utilisateur sont présentées Figure 5.16. Le principe général de récepteur est également présenté Section 5.4.1. Le récepteur mono-utilisateur diffère cependant du récepteur multi-utilisateurs par le choix de ses égaliseurs. Ici, à la première itération l'égaliseur est le DFE mono-utilisateur, optimisé selon un critère d'EQM calculé pour un bloc d'utilisateur (cf. Section 5.4.2.4), puis aux itérations suivantes, nous utilisons l'AI présenté Section 5.4.3.2. Le récepteur mono-utilisateur est bien moins performant que le multi-utilisateurs et ce notamment pour les utilisateurs avec le plus d'interférences multi-utilisateurs (1 et 4). De plus, dans ce cas, il n'y a pas de gain Turbo. Ce résultat s'explique facilement pour les utilisateurs 2 et 3, pour lesquels les performances après la première itération sont déjà celles de l'AI avec données retournées exactes (cf. Figure 5.13). En revanche, pour les utilisateurs 1 et 4 qui subissent beaucoup d'interférences dues aux autres utilisateurs, la méthode mono-utilisateur ne leur permet pas de rejeter efficacement cette interférence.

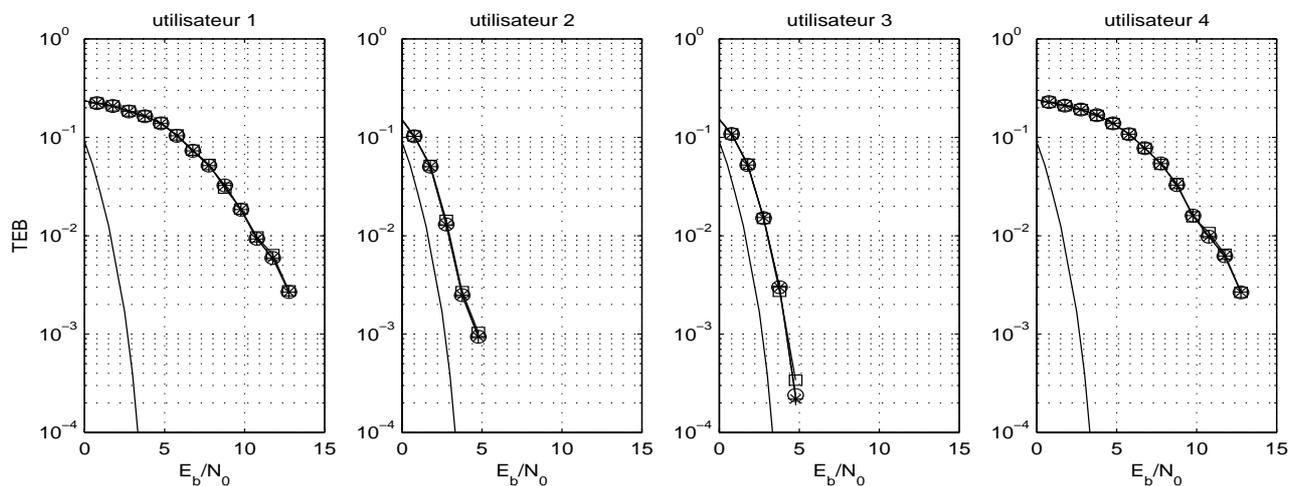


FIG. 5.16 – Performances du récepteur Turbo-CDMA mono-utilisateur. Légende cf. Figure 5.15.

Ceci motive notre utilisation des méthodes Turbo dans le cadre d'une transmission CDMA.

5.4.5 Amélioration de la structure : récepteur Full Turbo-CDMA

Nous venons de présenter un récepteur Turbo-CDMA en tant qu'extension directe du Turbo-égaliseur mono-utilisateur au cas CDMA multi-utilisateurs. Cependant, les performances de notre récepteur Turbo-CDMA, même lorsque les utilisateurs sont démodulés conjointement (méthodes multi-utilisateurs) et selon le meilleur ordre possible (5.16) cf. Figure 5.11, ne fournissent pas les performances asymptotiques de l'annuleur d'interférences alimenté avec les vrais symboles (Figure 5.15). Nous voulons donc améliorer encore les performances.

Tout en gardant une structure à base de filtres, nous allons améliorer l'annuleur d'interférences en tenant compte lors de l'optimisation des filtres, de la nature des données issues de l'itération précédente et ne plus faire l'hypothèse de données retournées exactes. Nous avons proposé une telle méthode dans le cas d'un seul utilisateur en estimant ces statistiques [23], mais cette méthode est trop coûteuse en calcul car elle nécessite l'estimation d'une matrice de corrélation puis son inversion. [78] utilise au contraire la connaissance exacte de ces statistiques et en propose un calcul astucieux et se place dans le contexte CDMA. Cependant, cette dernière méthode nécessite une inversion de matrice par estimation de symbole, et malgré le calcul itératif qui est proposé, la complexité est augmentée significativement. Nous proposons une nouvelle structure de récepteur Turbo-CDMA, qui n'augmente pas la complexité mais rend le système plus performant. C'est cette nouvelle structure proposée dans [63], que nous présentons maintenant.

5.4.5.1 Structure « Full » Turbo-CDMA

L'idée de ce nouveau récepteur Turbo-CDMA est de profiter complètement de la structure Turbo du système. Aussi, nous appelons cette nouvelle structure **Full** Turbo-CDMA. L'idée est du décodage des utilisateurs pour l'égaliseur et ce à toutes les itérations $p \geq 1$. Ainsi, nous égalisons le premier utilisateur et le décodons. Puis, nous utilisons ces données fraîchement décodées pour égaliser le second utilisateur, et ainsi de suite. Cette opération permet de gagner en effet une itération pour les données des utilisateurs dits « passés ». Le schéma du nouvel annuleur d'interférences est présenté Figure 5.17.

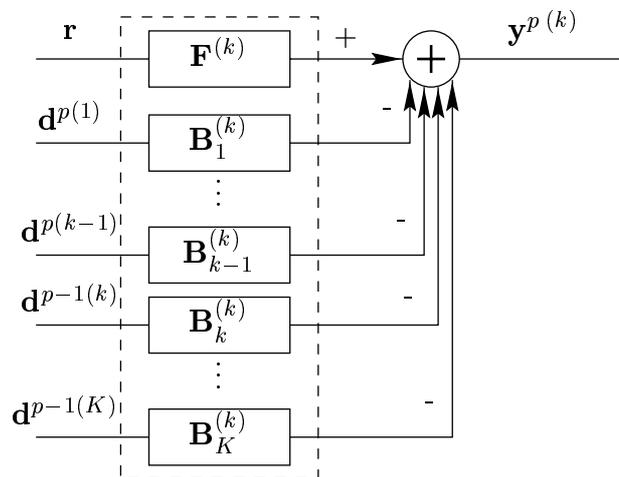


FIG. 5.17 – Annuleur d'interférences multi-utilisateurs pour le récepteur Full Turbo-CDMA.

Ainsi, cet AI relatif à l'utilisateur d'intérêt k dispose déjà des données décodées des utilisateurs qui le précèdent $d_n^{p(1)} \dots d_n^{p(k-1)}$, alors que dans le cas précédent (cf. Figure 5.10) les mêmes matrices étaient alimentées par $d_n^{p-1(1)} \dots d_n^{p-1(k-1)}$, d'où le gain d'une itération. De plus, ces données étant plus fiables, il est de même de la sortie de l'AI puis de la sortie du décodeur. Le gain Turbo devrait donc être plus important.

Le calcul des matrices $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}_j^{(k)}$ se fait toujours avec l'hypothèse de données retournées exactes. Aussi, leurs expressions ne changent pas par rapport à (5.18). Notons néanmoins, que cette nouvelle structure est successive, puisqu'il faut égaliser et décoder un utilisateur après l'autre. Ainsi, l'amélioration est obtenue à complexité égale mais au prix d'un délai temporel d'exécution supplémentaire.

Etudions maintenant la possibilité d'appliquer notre amélioration à la toute première itération.

5.4.5.2 Nouveau DFE et ses performances

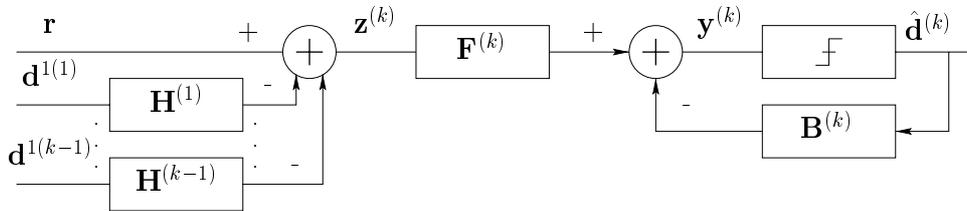


FIG. 5.18 – DFE multi-utilisateurs pour le récepteur Full Turbo-CDMA.

Nous venons de présenter la nouvelle structure Full Turbo-CDMA qui s'applique à l'annuleur d'interférences, mais qui peut également s'appliquer dès la première itération. En effet, les utilisateurs qui ont déjà été égalisés peuvent être également décodés. Et ce sont ces données décodées que nous décidons d'appliquer au DFE relatif à l'utilisateur d'intérêt. La structure du DFE devient alors celle de la Figure 5.18.

Ici encore la minimisation des matrices $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}_j^{(k)}$ se faisant toujours avec l'hypothèse de données retournées exactes, leurs expressions demeurent inchangées par rapport à (5.15).

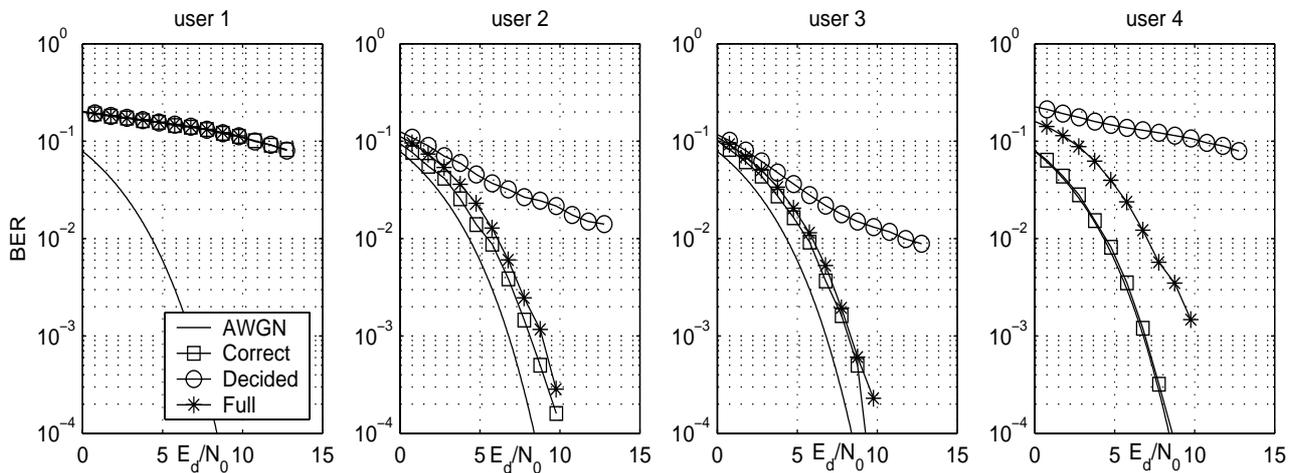


FIG. 5.19 – Performances du DFE multi-utilisateurs pour la structure **Full**. Les utilisateurs sont démodulés selon l'ordre : (1/2/3/4).

Les performances de ce nouveau DFE sont présentées Figures 5.19 et 5.20 et sont comparées avec les performances du même DFE multi-utilisateurs avec critère d'EQM défini par bloc d'utilisateurs, lorsque celui-ci est alimenté par les données exactes (C) ou par les données décidées en sortie de l'égaliseur (D). La Figure 5.19 montre que pour un ordre de démodulation arbitraire, la structure Full permet de limiter énormément le phénomène de propagation d'erreur, puisque les performances du DFE Full sont presque celles du cas avec données exactes (sauf pour l'utilisateur 4). Le bénéfice de la structure Full est encore plus marqué dans le cas où les utilisateurs sont démodulés selon le critère (5.16), car mis à part un décrochement à faible rapport signal à bruit pour l'utilisateur démodulé en dernier (1), les performances du DFE Full sont celles du DFE alimenté avec les données exactes. On a ainsi (quasi)-complètement éliminé le problème de propagation d'erreurs inhérent au DFE.

Les performances après le Full DFE étant meilleures, il doit en être de même pour le récepteur « Full » complet. C'est ce que nous nous proposons d'étudier maintenant.

5.4.5.3 Performances du récepteur « Full » Turbo-CDMA

Considérons maintenant que les utilisateurs ont été démodulés selon l'ordre (5.16) et comparons les performances du récepteur Turbo-CDMA (cf. Figure 5.15) avec celles de la structure améliorée Full (cf. Figure 5.21).

Nous notons que pour les utilisateurs 2 et 3, l'amélioration est peu marquée puisque la structure originelle fournit déjà des performances proches de la borne infranchissable caractérisant la transmission d'un message codé sur un canal avec pour unique perturbation un bruit additif blanc gaussien. Néanmoins, on remarque un gain Turbo marqué entre la première et la seconde itération pour la structure Full, suivi d'une stabilisation pour les itérations suivantes. En revanche, la stabilisation n'intervient qu'à la troisième itération pour la structure de base et en plus, les performances y sont légèrement moins bonnes.

L'amélioration apportée par le récepteur Full est beaucoup plus nette encore dans le cas des utilisateurs 4 et 1, qui sont les plus mauvais mais démodulés en dernier. Ils profitent donc plus de la structure successive du récepteur Full. Notons que ces deux utilisateurs convergent comme les autres utilisateurs en seulement 2 itérations. De plus, le gain est tel que la première itération

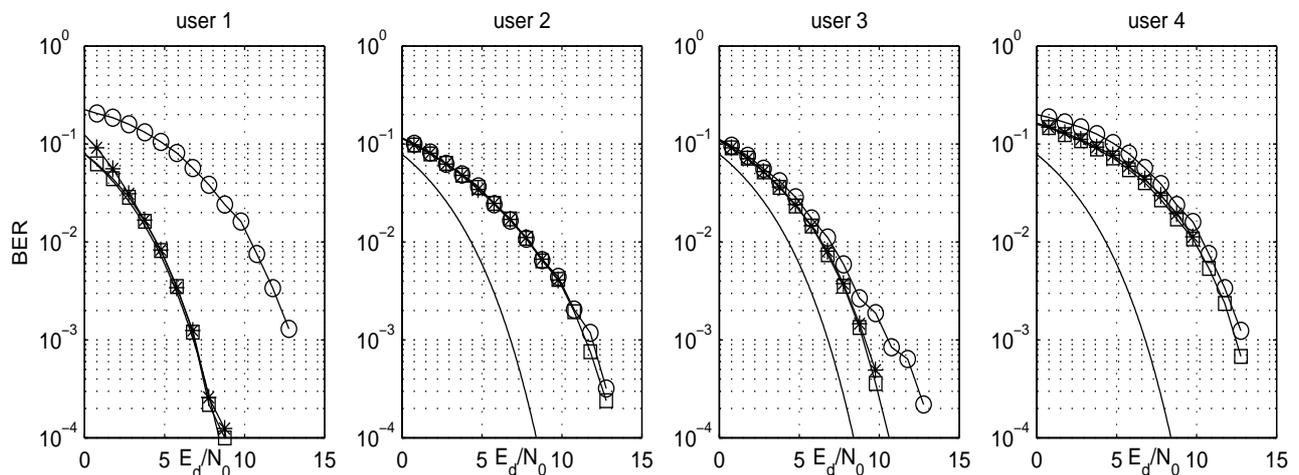


FIG. 5.20 – Performances du DFE multi-utilisateurs pour la structure **Full**. Les utilisateurs sont démodulés selon le **meilleur** ordre : (2/3/4/1). Légende cf. Figure 5.19.

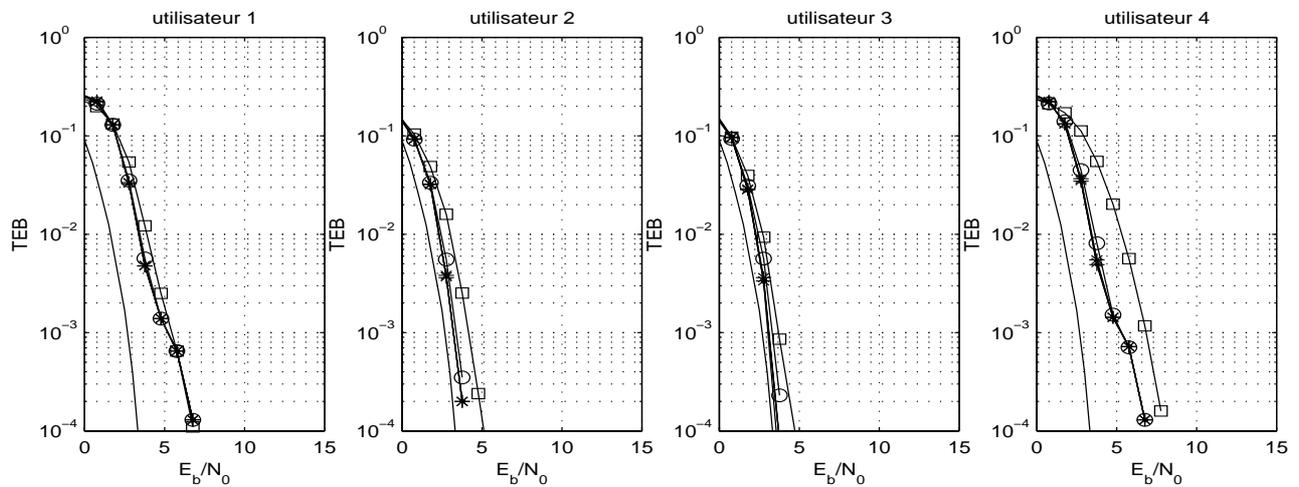


FIG. 5.21 – Performances du récepteur **Full** Turbo-CDMA multi-utilisateurs. Les utilisateurs sont démodulés selon le **meilleur** ordre: (2/3/4/1). Légende cf. Figure 5.15.

de l'utilisateur 1 est déjà meilleure que la sixième itération du récepteur Turbo-CDMA original.

Pour les curieux qui aimeraient connaître le gain apporté par le seul bon choix de l'ordre de démodulation dans la structure Full, nous présentons les performances du récepteur Full avec un ordre arbitraire de démodulation (Figure 5.22) à comparer avec la Figure 5.21.

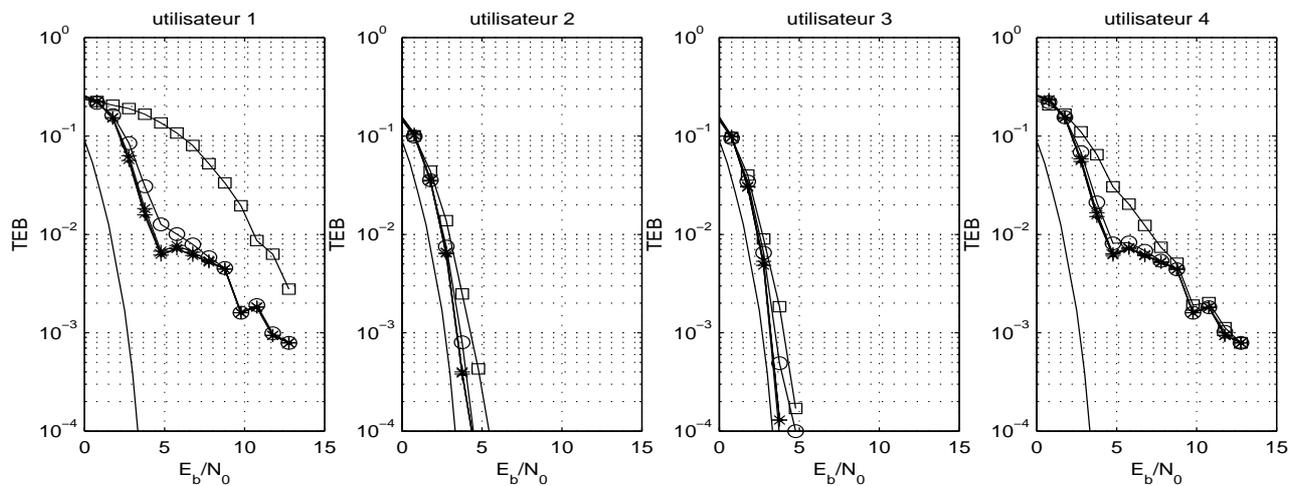


FIG. 5.22 – Performances du récepteur **Full** Turbo-CDMA multi-utilisateurs. Les utilisateurs sont démodulés dans l'ordre (1/2/3/4). Légende cf. Figure 5.15.

Ainsi, la structure Full permet de diminuer le nombre d'itérations à deux. Notons qu'une itération du récepteur Full nécessite de traiter K modules successivement alors que le récepteur Turbo-CDMA original les traite en parallèle. Ainsi, le temps nécessaire pour obtenir les performances est d'au moins 6 fois le temps de traitement d'un module contre $2 \times K$. Il est à noter que la sixième itération ne fournit pas encore les performances du Full Turbo. Le choix entre le récepteur Turbo-CDMA et sa version « Full » se fera donc en fonction de l'application qui permettra ou non le retard supplémentaire.

Néanmoins, il demeure toujours une distance entre les performances du récepteur Full Turbo et celles de la transmission codée sur un canal à bruit additif gaussien. Comme nous l'avons analysé dans le cas d'une transmission avec un seul utilisateur [61] et Section 4.3, cette distance

est due en partie au traitement itératif mais aussi au fait que la courbe de la transmission d'un utilisateur codé sur un canal à bruit additif gaussien n'est pas forcément la courbe optimale d'une transmission codée de plusieurs utilisateurs sur canaux dispersifs (dans ce cas la perte est due au canal mais aussi au fait de considérer plusieurs utilisateurs).

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué le principe du Turbo-égaliseur de [43] au cas d'une transmission CDMA asynchrone avec trajets multiples. Pour ce faire, nous avons proposé une première structure Turbo. Comme dans le cas d'un seul utilisateur, les données sont traitées par bloc et la structure s'organise autour de l'égalisation d'une part et du décodage d'autre part.

De plus, la structure traite en parallèle tous les utilisateurs. Ainsi, pour chacun d'eux, un égaliseur est alimenté par des échantillons reçus du canal et fournit une estimation pondérée du bloc de symboles émis, bloc qui alimente le décodeur. A partir de la deuxième itération, l'égaliseur utilise non seulement les échantillons reçus mais aussi le résultat de l'itération précédente. Ici, deux stratégies s'opposent : l'égaliseur d'un utilisateur donné peut utiliser une information relative à tous les utilisateurs (lui compris) et la méthode est dite multi-utilisateurs ; si, en revanche, l'égaliseur n'utilise une information relative qu'à l'utilisateur traité, la méthode est dite mono-utilisateur.

Dans le cas de la liaison montante, la réception est assurée par la station de base qui doit démoduler tous les utilisateurs. Ainsi, la méthode peut être multi (qui, par construction, démodule tous les utilisateurs) ou mono. En effet, dans le cas de la norme GSM et dans la liaison montante, la démodulation est mono. Seulement, dans la liaison montante CDMA, l'asynchronisme apporte beaucoup d'interférences entre utilisateurs (alors qu'il n'y en a pas dans la norme GSM, car la technique d'accès multiple est TDMA), que seule une méthode multi peut rejeter efficacement. C'est pourquoi, nous avons considéré des méthodes multi-utilisateurs.

Dans le cas de la liaison montante, le mobile, qui assure la réception, n'a pas accès aux symboles des autres utilisateurs (pour cause de confidentialité) et seule une méthode mono peut être envisagée. Néanmoins, même dans ce cas, l'interférence entre utilisateurs peut être importante. Elle est alors due au contrôle de puissance et doit être traitée. Aussi, nous avons considéré une version améliorée des méthodes mono-utilisateur classiques, où les utilisateurs interférents sont rejetés grâce à la connaissance de leurs statistiques d'ordre deux.

Ici, cependant, nous avons considéré exclusivement la liaison montante. Aussi, nous avons proposé des méthodes multi-utilisateurs mais aussi mono-utilisateur, de manière à les comparer entre elles.

Pour la première itération, nous avons considéré le DFE multi de [39] optimisé selon le critère EQM de tous les utilisateurs et avons proposé des DFE multi pour deux autres critères (EQM par symbole et par bloc d'utilisateur). Ces DFE donnant des performances similaires, nous avons retenu pour la suite le moins complexe à savoir celui optimisé selon le critère EQM par bloc d'utilisateur. Pour ces DFE, nous avons alors proposé un ordre de démodulation, qui tient compte de la puissance des utilisateurs et de leurs interférences. Ce critère nous a permis de réduire significativement le phénomène de propagation d'erreur, inhérent au DFE. Nous avons également proposé un DFE mono-utilisateur (amélioré) et avons conclu à la supériorité de la méthode multi, lorsque l'ordre de démodulation est celui énoncé plus haut.

Pour les itérations suivantes, nous avons proposé des AI multi et mono, optimisés selon un critère EQM symbole. Les performances du récepteur Turbo-CDMA ont montré la présence d'un gain Turbo. Néanmoins, il reste un écart dans les performances avec la borne BABG codé.

Aussi, nous avons proposé, dans un second temps, d'améliorer la structure multi-utilisateurs. L'annulation d'interférence est alors opérée de manière série et le récepteur est dit dite « Full »-Turbo. L'utilisateur le plus fort (au sens du critère défini ci-dessus) est égalisé puis décodé et c'est cette version de l'information, traitée par le décodeur (donc plus fiable), qui est utilisée pour égaliser le deuxième utilisateur et ainsi de suite. Sans augmenter la complexité, mais au prix d'un délai supplémentaire, les performances sont fortement améliorées. Ainsi, dès la première itération, le DFE supprime quasi-complètement la propagation d'erreur. Les simulations ont montré que les performances du récepteur global s'approchent du cas d'une transmission avec un seul utilisateur codé et sur un canal à bruit additif gaussien. Le nombre d'itérations Turbo requis dépend de la difficulté du canal.

Ainsi, pour la liaison montante, la méthode de démodulation à utiliser est celle multi-utilisateurs. Si le délai temporel est acceptable, nous conseillons l'utilisation de la solution Turbo-CDMA « Full », en respectant l'ordre de démodulation défini plus haut. Sinon, nous utiliserons la première structure, toujours avec le même ordre de démodulation (pour le DFE).

Conclusions et perspectives

Pour satisfaire un nombre d'utilisateurs toujours plus important, la recherche en communications numériques doit s'intéresser aujourd'hui au problème des transmissions fiables (c.-à-d. assurer une qualité de service pendant un certain pourcentage du temps et pour un maximum d'utilisateur, où le pourcentage du temps et le taux d'erreur dépend de l'application) malgré un débit élevé sur des canaux sélectifs en fréquence. Dans ce contexte de travail, les normes actuelles (GSM, IS 95) et futures (UMTS), pour atteindre les meilleures performances possibles, disposent de codeur de canal et d'entrelaceur à l'émission. C'est pourquoi, un récepteur « classique » est la concaténation en série d'un égaliseur, d'un désentrelaceur et d'un décodeur de canal. Cette approche est sous-optimale car disjointe. En revanche, l'approche conjointe, si elle est possible, ne peut que fournir de meilleures performances. Aussi, c'est à ce problème de l'égalisation et du décodage conjoints que nous avons travaillé dans cette thèse. La solution optimale étant de forte complexité, nous nous sommes donc intéressés à des récepteurs sous-optimaux et plus particulièrement au Turbo-égaliseur. En effet, en remarquant que codeur et canal forment une concaténation de deux convolutions en série séparées par un entrelaceur, il est possible d'appliquer le principe des Turbo-codes à la réception.

Le Turbo-égaliseur que nous avons considéré est celui proposé dans [43], où l'égalisation est obtenue à partir de filtres à la complexité réduite. En effet, cette structure encore peu analysée au début de cette thèse, nous semblait alors très prometteuse. Nous avons donc décidé d'étudier plus avant cette structure. Pour ce faire, nous avons tout d'abord analysé les performances du Turbo-égaliseur. Dans un premier temps, l'étude des caractéristiques des courbes de performances nous ont permis de définir :

- le point de déclenchement : le rapport signal à bruit à partir duquel nous observons un gain Turbo d'une itération à l'autre,
- l'effet d'avalanche : après le point de déclenchement, les pentes des performances augmentent d'une itération à l'autre.

Puis nous avons observé une distance entre les performances du Turbo-égaliseur et celles de la transmission codée sur canal à bruit additif gaussien. Nous avons ensuite montré que cette distance est due en partie au canal dispersif et en partie au traitement sous-optimal du Turbo-égaliseur. Pour montrer cela, nous avons calculé une borne inférieure sur les performances du récepteur optimal d'égalisation et de décodage conjoints. Cette borne étant elle-même de complexité calculatoire importante, nous avons réalisé une étude de cas sur les canaux dispersifs (cf. Section 2.5) pour trouver un cas, où cette borne était facile à calculer et où transmission codée sur canal à bruit additif gaussien et récepteur optimal conjoint donnaient des performances différentes (cf. Section 4.3).

La seconde contribution de nos travaux concerne l'analyse fonctionnelle du Turbo-égaliseur (cf. Section 4.4). Cette analyse modélise le traitement itératif opéré à la réception. Néanmoins, en modélisant l'égaliseur et le décodeur comme des traitements agissant sur les puissances d'erreur des données, il est possible d'analyser le processus comme solution du problème du

point fixe. Par cette analyse, nous avons ainsi retrouvé certaines des études sur les performances faites préalablement. Ainsi, une explication de la distance entre les performances du Turbo-égaliseur et de la borne BABG codé (cf. Section 4.4.2.1), et une interprétation du point de déclenchement (cf. Section 4.4.2.2). A partir de cette analyse, nous avons pu définir une notion de difficulté du canal, lorsque le récepteur est le Turbo-égaliseur.

Enfin, nous avons appliqué le Turbo-égaliseur au cas de la liaison montante du CDMA, où les perturbations sont alors dues au canal de transmission mais aussi à la présence de plusieurs utilisateurs. Pour cette liaison montante l'asynchronisme provoque des interférences entre utilisateurs, que seule la détection multi-utilisateurs peut rejeter efficacement. Nous avons ainsi considéré une première structure de réception, où les différents utilisateurs sont traité en parallèle. Pour cette structure, nous avons proposé un nouvel égaliseur DFE optimisé selon le critère EQM par bloc d'utilisateur ; et pour ce DFE, un nouvel ordre de démodulation qui tient compte de la puissance de l'utilisateur d'intérêt et des interférences qu'il subit. A partir de la deuxième itération Turbo, la détection est réalisée à l'aide d'un AI optimisé selon le critère EQM symbole. Dans un second temps, nous avons amélioré ce premier récepteur Turbo-CDMA, en traitant (*i.e.* égalisation et décodage) successivement chacun des utilisateurs. Ainsi, l'utilisateur le plus fort (au sens du critère défini ci-dessus) est égalisé et décodé. Puis, cette information plus fiable (car traitée par le décodeur) est utilisée pour égaliser l'utilisateur suivant. Cette nouvelle structure fournit des performances proches de celle du canal BABG codé, sans pour autant augmenter la complexité, mais en ajoutant un délai supplémentaire.

Si nos travaux proposent déjà certaines réponses, ils suggèrent également de nouvelles questions.

- Ainsi, le comportement du Turbo-égaliseur lorsque le canal est estimé. Il est en effet important de quantifier la robustesse du Turbo-égaliseur vis-à-vis d'un défaut d'estimation du canal. De plus, comme le proposent [31, 37], nous pouvons intégrer l'estimation du canal dans le processus Turbo et ainsi l'améliorer au cours des itérations.
- Quant à l'analyse fonctionnelle, elle peut être appliquée au cas du CDMA. Néanmoins, nous avons observé lors des simulations, que dans le cas de séquences d'étalement orthogonales, les performances sont liées aux séquences (et notamment à leurs propriétés d'autocorrélation). Aussi, nous obtiendrons des courbes de décodeur différentes selon l'utilisateur, ce qui rendrait l'interprétation plus laborieuse. Pour un comportement plus homogène, soit la même courbe pour tous les utilisateurs, il faut considérer des séquences d'étalement pseudo-aléatoires.
- Dès lors que nous avons identifié la distance en terme de performances entre le Turbo-égaliseur et le récepteur optimal conjoints, un nouveau problème consiste à diminuer cette distance sans pour autant augmenter trop la complexité. Une première amélioration consiste à intégrer les statistiques des données traitées (et notamment le retour des itérations précédentes) lors de l'optimisation des filtres de l'annuleur d'interférences, égaliseur utilisé à partir de la deuxième itération. Nous avons proposé d'estimer ces statistiques dans le cas de la transmission d'un seul utilisateur [23] mais ceci peut être appliqué au cas multi-utilisateurs. Notons que [78] propose dans le cas du CDMA un égaliseur qui tient compte des vraies statistiques au prix d'une inversion de matrice par estimation de symboles. Un calcul itératif de cette matrice permet de limiter la complexité. Entre ces deux approches, de nouvelles idées ont leur place.
- Enfin, nous savons depuis [35] que le principe Turbo peut s'appliquer à de nombreux

problèmes. Cependant, la Turbo-égalisation par rapport aux Turbo-codes a ceci de spécifique qu'elle réunit deux traitements (à savoir l'égalisation et le décodage) aux objectifs différents et qui travaillent dans des espaces différents. De ce fait, notre étude du Turbo-égaliseur est originale vis-à-vis de celles déjà faites sur les Turbo-codes et peut s'appliquer à tout système souhaitant traiter par le principe Turbo deux traitements fondamentalement différents : estimation de canal et égalisation, synchronisation et égalisation, ou décodage source et canal.

Annexe A

Caractérisation des canaux sévères

A.1 Canaux à 3 trajets

A.1.1 Cas des canaux à 2 zéros complexes conjugués, de module 1

Nous considérons ici les canaux de type :

$$h(z) = \frac{1}{2+a^2} \cdot (1 + az^{-1} + z^{-2}), \text{ avec } a = -2 \cos \theta$$

Les motifs d'erreur d'intérêt ont été précisé au paragraphe 2.5.3.2 (cf. (2.18)) et donnent en sortie du canal une distance de :

$$d^2 = 8 \left(\frac{1 + (1+n)(1+a)^2}{2+a^2} \right) + 4L \frac{(2+a)^2}{2+a^2}$$

avec $L = \sum_{i=1}^{n+1} l_i \geq 0$, et $n \geq 0$

Nous nous intéressons au cas $\cos \theta \geq 0 \Rightarrow -2 \leq a \leq 0$

$$\begin{aligned} d^2 < 4 &\Leftrightarrow a^2 \cdot (2n+2+L-1) + a \cdot 4(n+1+L) + 2(n+1) + 4L < 0 \\ \Delta' &= 2(n+L-nL+1) \\ d^2 < 4 &\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow n + (1-n)L + 1 > 0 \\ \text{cas } n=0 &\Leftrightarrow L+1 > 0 : \text{ toujours vrai} \\ \text{cas } n=1 &\Leftrightarrow 1+L-L+1 > 0 : \text{ toujours vrai} \\ \text{cas } n > 1 &\Leftrightarrow L > \frac{n+1}{n-1} \\ &\Leftrightarrow (n=2 \text{ et } 0 \leq L \leq 2) \text{ ou } (n > 2 \text{ et } 0 \leq L < 2) \\ \Delta' = 0 &\Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{-2(n+1+L) \pm \sqrt{2(n+L-nL+1)}}{2n+1+L} \\ d^2 < 4 &\Leftrightarrow \frac{n+1+L - \sqrt{\frac{n+L-nL+1}{2}}}{2n+1+L} < \cos \theta < \frac{n+1+L + \sqrt{\frac{n+L-nL+1}{2}}}{2n+1+L} \end{aligned}$$

A.1.2 Cas des canaux à 2 zéros réels inverses

Nous considérons ici les canaux de type :

$$h(z) = \frac{1}{2+a^2} \cdot (1 + az^{-1} + z^{-2}), \text{ avec } a = -\alpha - \frac{1}{\alpha}$$

Les motifs d'erreur d'intérêt ont été précisé au paragraphe 2.5.3.3 et donnent en sortie du canal une distance de :

$$d^2 = 8 \left(\frac{1 + (1+a)^2}{2+a^2} \right) + 4l \frac{(2+a)^2}{2+a^2}$$

Notons c_α la condition $0 < \alpha \leq 1$ sur α . Dès lors, on obtient :

$$\begin{aligned} d^2 < 4 \text{ et } c_\alpha &\Leftrightarrow -2 - \sqrt{\frac{2}{l+1}} < a < -2 + \sqrt{\frac{2}{l+1}}, \quad a = -\alpha - \frac{1}{\alpha}; \text{ et } c_\alpha \\ &\Leftrightarrow \left(\underbrace{d_1 = 2 - \sqrt{\frac{2}{l+1}} < -a \text{ et } c_\alpha}_1 \right) \text{ ou } \left(\underbrace{-a < 2 + \sqrt{\frac{2}{l+1}} = d_2 \text{ et } c_\alpha}_2 \right) \\ 1 &\Leftrightarrow \alpha^2 + 1 < d_1 \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - d_1 \alpha + 1 < 0 \\ \Delta &= d_1^2 - 4 = \frac{2}{l+1} + 4\sqrt{\frac{2}{l+1}} \\ \alpha_{1,2} &= 1 + \sqrt{\frac{1}{2(l+1)}} \pm \sqrt{\frac{1}{2(l+1)} + \sqrt{\frac{2}{l+1}}} \Rightarrow \alpha_2 > 1 \\ 1 \text{ et } c_\alpha &\Leftrightarrow 1 + \sqrt{\frac{1}{2(l+1)}} - \sqrt{\frac{1}{2(l+1)} + \sqrt{\frac{2}{l+1}}} < \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} 2 &\Leftrightarrow \alpha^2 + 1 > d_2 \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - d_2 \alpha + 1 > 0 \\ \Delta &= d_2^2 - 4 = \frac{2}{l+1} - 4\sqrt{\frac{2}{l+1}} \\ 2 &\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{l+1} > 16 \Leftrightarrow l < -\frac{7}{8} \text{ IMPOSSIBLE car } l \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit

$$d^2 < 4 \text{ et } 0 < \alpha \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\frac{1}{2(l+1)}} - \sqrt{\frac{1}{2(l+1)} + \sqrt{\frac{2}{l+1}}} \quad (\text{A.1})$$

Annexe B

Egaliseur DFE pour le CDMA

B.1 Méthodes multi-utilisateurs

B.1.1 Critère EQM symbole

B.1.1.1 Notations

D'après les notations de la Section 5.4.2.1, la sortie pondérée de l'égaliseur est :

$$y_n^{(k)} = \mathbf{f}_n^{(k)\dagger} \mathbf{r} - \mathbf{b}_n^{(k)\dagger} \hat{\mathbf{d}} = [\mathbf{f}_n^{(k)\dagger}, \mathbf{b}_n^{(k)\dagger}] \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\hat{\mathbf{d}} \end{bmatrix}.$$

Nous cherchons ici les expressions des vecteurs $\mathbf{f}_n^{(k)}$ et $\mathbf{b}_n^{(k)}$, qui minimisent l'EQM symbole :

$$E[|y_n^{(k)} - d_n^{(k)}|^2].$$

De plus, de part la structure DFE, le vecteur $\mathbf{b}_n^{(k)}$ n'agit que sur le passé du symbole courant $d_n^{(k)}$. La minimisation doit être poursuivie sous cette contrainte. La difficulté de la minimisation sous contrainte peut être contournée en introduisant les vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{P,n} &= [d_1^{(1)} \cdots d_{n-1}^{(k)}]^T = [d_1 \cdots d_{t-1}]^T, \\ \mathbf{d}_{F,n} &= [d_n^{(k)} \cdots d_N^{(K)}]^T = [d_t \cdots d_{KN}]^T, \\ \mathbf{b}_{P,n} &= [b_1^{(1)} \cdots b_{n-1}^{(k)}]^T = [b_1 \cdots b_{t-1}]^T, \end{aligned}$$

où $t = (k-1)N + n$ est l'indice du symbole courant i.e. l'indice du $n^{ième}$ symbole de l'utilisateur d'intérêt k . La sortie pondérée de l'égaliseur inclue maintenant la contrainte sur $\mathbf{b}_n^{(k)}$ et s'écrit :

$$y_n^{(k)} = \mathbf{f}_n^{(k)\dagger} \mathbf{r} - \mathbf{b}_{P,n}^{(k)\dagger} \hat{\mathbf{d}}_{P,n} = [\mathbf{f}_n^{(k)\dagger}, \mathbf{b}_{P,n}^{(k)\dagger}] \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\hat{\mathbf{d}}_{P,n} \end{bmatrix}.$$

et \mathbf{r} peut se décomposer selon :

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}_{P,n} \mathbf{d}_{P,n} + \mathbf{H}_{F,n} \mathbf{d}_{F,n} + \mathbf{w},$$

où $\mathbf{H}_{P,n}$ est une matrice de taille $(Q_{N+W-1, t-1})$, dont les $t-1$ colonnes sont les $t-1$ premières colonnes de \mathbf{H} et où $\mathbf{H}_{F,n}$ est une matrice de taille $(Q_{N+W-1, KN-t+1})$, dont les $KN-t+1$ colonnes sont les $KN-t+1$ dernières colonnes de \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}_{P,n}(:, :) = \mathbf{H}(:, 1 : t-1), \quad \mathbf{H}_{F,n}(:, :) = \mathbf{H}(:, t : KN).$$

B.1.1.2 Calcul de l'EQM

Avec ces notations, l'EQM symbole s'écrit :

$$\text{EQM} = E[|y_n^{(k)} - d_n^{(k)}|^2] = E \left[\left| \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n^{(k)\dagger} & \mathbf{b}_{P,n}^{(k)\dagger} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\hat{\mathbf{d}}_{P,n} \end{bmatrix} - d_n^{(k)} \right|^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

B.1.1.3 Rappel : solution de Wiener

On cherche \mathbf{a} qui minimise l'EQM :

$$\begin{aligned} \text{EQM} &= E[|\mathbf{a}^\dagger \mathbf{z} - d_t|^2] \\ &= \mathbf{a}^\dagger \underbrace{E[\mathbf{z}\mathbf{z}^\dagger]}_{\mathcal{R}} \mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger \underbrace{E[d_t^* \mathbf{z}]}_{\mathbf{p}} - \underbrace{E[d_t \mathbf{z}^\dagger]}_{\mathbf{p}^\dagger} \mathbf{a} + \sigma_d^2 \end{aligned}$$

$$\text{Conventions pour le gradient : } \begin{cases} \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\dagger \mathcal{R} \mathbf{u}) = \mathcal{R} \mathbf{u} \\ \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^\dagger \mathbf{p} + \mathbf{p}^\dagger \mathbf{u}) = \mathbf{p} \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{a}} \text{ solution de Wiener : } \nabla_{\mathbf{a}}(\text{EQM})|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{p} \quad (\text{B.2})$$

Ici, $\mathbf{a}^\dagger = [\mathbf{f}_n^{(k)\dagger}, \mathbf{b}_{P,n}^{(k)\dagger}]$, $\mathbf{z}^\dagger = [\mathbf{r}^\dagger, -\hat{\mathbf{d}}_{P,n}^{(k)\dagger}]$ et $d_t = d_n^{(k)}$:

$$\mathcal{R} = E \left[\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\hat{\mathbf{d}}_{P,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}^\dagger & -\hat{\mathbf{d}}_{P,n}^\dagger \end{bmatrix} \right]$$

$$\mathbf{p} = E \left[d_n^{(k)*} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\hat{\mathbf{d}}_{P,n} \end{bmatrix} \right]$$

Hypothèse 1 : dans la suite, pour pouvoir calculer \mathbf{p} et \mathcal{R} , nous supposons que le retour est exact i.e. :

$$\hat{\mathbf{d}}_{P,n} = \mathbf{d}_{P,n}. \quad (\text{B.3})$$

Hypothèse 2 : nous supposons que les données sont i.i.d. de matrice d'autocorrélation :

$$\mathbf{R}_d = \sigma_d^2 \mathbf{I}. \quad (\text{B.4})$$

Notons que cette hypothèse **2** permet d'obtenir des expressions simples de \mathbf{p} et \mathcal{R} . De plus, cette hypothèse est couramment faite dans le cadre de l'égalisation. Nous pouvons fournir à la demande le cas plus général d'une matrice d'autocorrélation \mathbf{R}_d quelconque.

B.1.1.4 Calcul de \mathbf{p}

Avec les hypothèses (B.3) et (B.4), \mathbf{p} devient :

$$\mathbf{p} = E \left[d_n^{(k)*} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\mathbf{d}_{P,n} \end{bmatrix} \right] \quad \begin{aligned} E[d_n^{(k)*} \mathbf{d}_{P,n}] &= \mathbf{0} \\ E[d_n^{(k)*} \mathbf{r}] &= \mathbf{H} E[d_n^{(k)*} \mathbf{d}] = \sigma_d^2 \mathbf{h}_n^{(k)} \end{aligned}$$

où $\mathbf{h}_n^{(k)}$ est la colonne de \mathbf{H} relative au symbole courant, d'où

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 \mathbf{h}_n^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ QN+W-1 \\ \uparrow \\ t-1 \\ \downarrow \end{array} \quad (B.5)$$

B.1.1.5 Calcul de \mathcal{R}

$$\mathcal{R} = E \left[\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\mathbf{d}_{P,n} \end{bmatrix} [\mathbf{r}^\dagger, -\mathbf{d}_{P,n}^\dagger] \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right]$$

$$- \mathcal{A} = E[\mathbf{r}\mathbf{r}^\dagger] = \mathbf{H} \underbrace{E[\mathbf{d}\mathbf{d}^\dagger]}_{\sigma_d^2 \mathbf{I}} \mathbf{H}^\dagger + E[\mathbf{w}\mathbf{w}^\dagger] \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{A} = \sigma_d^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w}$$

$$- \mathcal{C} = -E[\mathbf{d}_{P,n}\mathbf{r}^\dagger] = -E[\mathbf{d}_{P,n}\mathbf{d}_{P,n}^\dagger]\mathbf{H}_{P,n}^\dagger \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{C} = -\sigma_d^2 \mathbf{H}_{P,n}^\dagger}$$

$$- \mathcal{B} = -E[\mathbf{r}\mathbf{d}_{P,n}^\dagger] = \mathcal{C}^\dagger; \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{B} = -\sigma_d^2 \mathbf{H}_{P,n}}$$

$$- \mathcal{D} = E[\mathbf{d}_{P,n}\mathbf{d}_{P,n}^\dagger] \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{D} = \sigma_d^2 \mathbf{I}_t}$$

$$\mathbf{I}_t = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \uparrow \\ t-1 \\ \downarrow \end{array} \\ \leftarrow \begin{array}{c} t-1 \\ \rightarrow \end{array} \end{array}$$

B.1.1.6 Calcul de \mathcal{R}^{-1}

$$\text{Soit } \mathcal{R} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{array} \right]. \text{ On cherche } \mathcal{R}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{A}' & \mathcal{B}' \\ \hline \mathcal{C}' & \mathcal{D}' \end{array} \right]$$

$$\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathcal{C}\mathcal{A}' + \mathcal{D}\mathcal{C}' = \mathbf{0} \quad (B.6)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B}' + \mathcal{B}\mathcal{D}' = \mathbf{0} \quad (B.7)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}' + \mathcal{B}\mathcal{C}' = \mathbf{I} \quad (B.8)$$

$$\mathcal{C}\mathcal{B}' + \mathcal{D}\mathcal{D}' = \mathbf{I} \quad (B.9)$$

$\mathcal{A}^{-1} \times (B.7)$ et $\mathcal{D}^{-1} \times (B.9)$ donnent \mathcal{D}' et \mathcal{B}' , tandis que $\mathcal{A}^{-1} \times (B.8)$ et $\mathcal{D}^{-1} \times (B.6)$ fournissent

\mathcal{A}' et \mathcal{C}' :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}' &= (\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})^{-1} \\ \mathcal{B}' &= -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}(\mathcal{D} - \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})^{-1} \\ \mathcal{A}' &= (\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1} \\ \mathcal{C}' &= -\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

B.1.1.7 Calcul des vecteurs du DFE

De part l'expression particulière de \mathbf{p} (B.5), pour obtenir les vecteurs $\mathbf{f}_n^{(k)}$ et $\mathbf{b}_n^{(k)}$, il suffit de connaître \mathcal{A}' et \mathcal{C}' . En effet,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_n^{(k)} \\ \mathbf{b}_{P,n}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathcal{R}^{-1}\mathbf{p} = \sigma_d^2 \begin{bmatrix} \mathcal{A}'\mathbf{h}_n^{(k)} \\ \mathcal{C}'\mathbf{h}_n^{(k)} \end{bmatrix}.$$

- $\mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C} = \sigma_d^2\mathbf{H}_{P,n}\mathbf{H}_{P,n}^\dagger$ et $\mathcal{A} = \sigma_d^2\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w = \sigma_d^2\mathbf{H}_{P,n}\mathbf{H}_{P,n}^\dagger + \sigma_d^2\mathbf{H}_{F,n}\mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \mathbf{R}_w$
d'où $\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C} = \sigma_d^2\mathbf{H}_{F,n}\mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \mathbf{R}_w$
- $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C} = -\mathbf{H}_{P,n}^\dagger$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n^{(k)} &= \sigma_d^2 \left(\sigma_d^2\mathbf{H}_{F,n}\mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \mathbf{R}_w \right)^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)} \\ \mathbf{b}_{P,n}^{(k)} &= \sigma_d^2\mathbf{H}_{P,n}^\dagger \left(\sigma_d^2\mathbf{H}_{F,n}\mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \mathbf{R}_w \right)^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Si le bruit est blanc de puissance σ_w^2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_n^{(k)} &= \sigma_d^2 \left(\sigma_d^2\mathbf{H}_{F,n}\mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \sigma_w^2\mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)} \\ \mathbf{b}_{P,n}^{(k)} &= \sigma_d^2\mathbf{H}_{P,n}^\dagger \left(\sigma_d^2\mathbf{H}_{F,n}\mathbf{H}_{F,n}^\dagger + \sigma_w^2\mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)}. \end{aligned}$$

B.1.2 Critère EQM bloc

Cette démonstration a été obtenue à partir de [72, page 377], qui considère le cas asynchrone. Grâce à notre modèle, il est aisé d'obtenir le résultat dans le cas de transmission multitrajets, comme nous le présentons ci-dessous.

B.1.2.1 Notations

La sortie du canal \mathbf{r} et la sortie pondérée \mathbf{y} de l'égaliseur DFE bloc vérifient :

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{r} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{d}}. \quad (\text{B.12})$$

\mathbf{F} et \mathbf{B} minimisent l'EQM :

$$E[\|\mathbf{y} - \mathbf{d}\|^2],$$

avec la contrainte que \mathbf{B} soit strictement triangulaire et avec l'hypothèse de données retournées exactes :

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}.$$

B.1.2.2 Calcul de l'EQM

Nous utilisons ici le résultat classique :

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \text{trace}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger\}.$$

Puis, par permutation de l'espérance E et de la trace de la matrice, nous obtenons une nouvelle écriture de l'EQM :

$$E[\|\mathbf{y} - \mathbf{d}\|^2] = \text{trace}\left\{E[(\mathbf{y} - \mathbf{d})(\mathbf{y} - \mathbf{d})^\dagger]\right\} = \text{trace}\{\text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\}\}.$$

B.1.2.3 Calcul de la matrice de covariance $\text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\}$

Avec $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}$:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\} &= \text{cov}\{\mathbf{F}\mathbf{r} - (\mathbf{B} + \mathbf{I})\mathbf{d}\} \\ &= (\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{B} - \mathbf{I})\mathbf{R}_d(\mathbf{F}\mathbf{H} - \mathbf{B} - \mathbf{I})^\dagger + \mathbf{F}\mathbf{R}_w\mathbf{H}^\dagger, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

où \mathbf{R}_d et \mathbf{R}_w sont respectivement les matrices de covariance des vecteurs \mathbf{d} et \mathbf{w} et sont supposées de rang plein.

B.1.2.4 Optimisation de \mathbf{F} pour \mathbf{B} arbitraire

Pour ce faire, nous mettons la covariance (B.13) sous la forme :

$$(\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}})\mathbf{C}(\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}})^\dagger = \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{F}^\dagger - \bar{\mathbf{F}}\mathbf{C}\mathbf{F}^\dagger - \mathbf{F}\mathbf{C}\bar{\mathbf{F}}^\dagger + \bar{\mathbf{F}}\mathbf{C}\bar{\mathbf{F}}^\dagger.$$

Par identification et avec le terme $\mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{F}^\dagger$, nous obtenons \mathbf{C} . Puis, avec le terme $\bar{\mathbf{F}}\mathbf{C}\mathbf{F}^\dagger$, nous en déduisons $\bar{\mathbf{F}}$. D'où

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}\mathbf{R}_d\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{\mathbf{F}} = (\mathbf{B} + \mathbf{I})\mathbf{R}_d\mathbf{H}^\dagger(\mathbf{H}\mathbf{R}_d\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w)^{-1} \quad (\text{B.15})$$

$$\text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\} = (\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}})\mathbf{C}(\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}})^\dagger + (\mathbf{B} + \mathbf{I})\mathbf{R}_d(\mathbf{B} + \mathbf{I})^\dagger - \bar{\mathbf{F}}\mathbf{C}\bar{\mathbf{F}}^\dagger$$

Or

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}\mathbf{C}\bar{\mathbf{F}}^\dagger &= (\mathbf{B} + \mathbf{I})\mathbf{R}_d\mathbf{H}^\dagger(\mathbf{H}\mathbf{R}_d\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}_d(\mathbf{B} + \mathbf{I})^\dagger \\ (\mathbf{B} + \mathbf{I})\mathbf{R}_d(\mathbf{B} + \mathbf{I})^\dagger - \bar{\mathbf{F}}\mathbf{C}\bar{\mathbf{F}}^\dagger &= (\mathbf{B} + \mathbf{I})\left(\mathbf{R}_d - \mathbf{R}_d\mathbf{H}^\dagger(\mathbf{H}\mathbf{R}_d\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{R}_d\right)(\mathbf{B} + \mathbf{I})^\dagger \end{aligned}$$

Rappelons ici le lemme d'inversion matricielle [19, page 693] :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{DA}^{-1} \quad (\text{B.16})$$

En posant, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{R}_d$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}^\dagger$, $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{R}_w$ et $\mathbf{D} = \mathbf{H}$ et en appliquant le lemme (B.16), nous obtenons :

$$\text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\} = (\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}})\mathbf{C}(\mathbf{F} - \bar{\mathbf{F}})^\dagger + (\mathbf{B} + \mathbf{I})\left(\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^\dagger\mathbf{R}_w^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}(\mathbf{B} + \mathbf{I})^\dagger$$

Comme \mathbf{C} est définie strictement positive, le minimum est obtenu lorsque $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}$, avec $\bar{\mathbf{F}}$ et \mathbf{C} définis (B.14) et (B.15).

B.1.2.5 Optimisation de \mathbf{B}

Nous cherchons maintenant la matrice strictement triangulaire \mathbf{B} qui minimise la trace de la covariance :

$$\text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\} = (\mathbf{B} + \mathbf{I})(\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{B} + \mathbf{I})^\dagger.$$

Une solution évidente est $\mathbf{B} = -\mathbf{I}$, mais cette solution ne vérifie pas la condition sur \mathbf{B} (\mathbf{B} doit avoir des éléments diagonaux nuls). Introduisons la décomposition de Cholesky [30, page 143] de la matrice définie positive $\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}$:

$$\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H} = (\mathbf{\Sigma} \mathbf{U})^\dagger \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}$$

où $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice diagonale et où \mathbf{U} est une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1. Supposons la matrice \mathbf{B} triangulaire supérieure et notons \mathbf{T} , la matrice :

$$\mathbf{T} = (\mathbf{B} + \mathbf{I})(\mathbf{\Sigma} \mathbf{U})^{-1}.$$

La matrice \mathbf{T} est également triangulaire supérieure, d'où si L est la taille de la matrice \mathbf{T} :

$$\text{trace}\{\text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\}\} = \text{trace}\{\mathbf{T} \mathbf{T}^\dagger\} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^l |\mathbf{T}_{kl}|^2 \geq \sum_{l=1}^L \mathbf{T}_{kk}^2, \quad (\text{B.17})$$

en utilisant la triangularité de \mathbf{T} . Or,

$$\mathbf{T}_{kk} = \underbrace{(\mathbf{B} + \mathbf{I})_{kk}}_{=1 \text{ car } \mathbf{B}_{kk}=0, \mathbf{I}_{kk}=1} \left((\mathbf{\Sigma} \mathbf{U})^{-1} \right)_{kk} = \left((\mathbf{\Sigma})^{-1} \right)_{kk} = \frac{1}{(\mathbf{\Sigma})_{kk}}$$

Nous avons :

$$\text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\} = (\mathbf{B} + \mathbf{I}) \mathbf{U}^{-1} \mathbf{\Sigma}^{-2} \mathbf{U}^{\dagger -1} (\mathbf{B} + \mathbf{I})^\dagger.$$

Choisissons $\bar{\mathbf{B}}$ tel que

$$(\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{I}) \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{U} - \mathbf{I}.$$

Alors, la borne inférieure (B.17) est atteinte car :

$$\text{cov}\{\mathbf{y} - \mathbf{d}\} = \mathbf{\Sigma}^{-2}.$$

B.1.2.6 Expressions littérales des matrices optimales $\bar{\mathbf{F}}$ et $\bar{\mathbf{B}}$

D'après (B.15)

$$\bar{\mathbf{F}} = \underbrace{(\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{I})}_{\mathbf{U}} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{H} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w)^{-1} = \mathbf{U} \underbrace{(\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H})^{-1}}_{(\mathbf{\Sigma} \mathbf{U})^{-1} (\mathbf{\Sigma} \mathbf{U})^{\dagger -1}} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1}$$

et donc :

$$\boxed{\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{U} - \mathbf{I}}$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{\Sigma}^{-2} \mathbf{U}^{\dagger -1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1}}$$

où \mathbf{U} et Σ résultent de la décomposition de Cholesky :

$$\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H} = (\Sigma \mathbf{U})^\dagger \Sigma \mathbf{U}.$$

En effet, montrons que :

$$\mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{H} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w)^{-1} = (\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1}$$

Appliquons le lemme d'inversion matricielle (B.16) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} &= (\mathbf{R}_d - \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{R}_w + \mathbf{H} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{R}_d) \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \\ &= \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{R}_w^{-1} - (\mathbf{R}_w + \mathbf{H} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1}) \\ &= \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{R}_w + \mathbf{H} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger)^{-1} \underbrace{((\mathbf{R}_w + \mathbf{H} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger) \mathbf{R}_w^{-1} - \mathbf{H} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1})}_{\mathbf{I}} \\ &= \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{R}_w + \mathbf{H} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^\dagger)^{-1} \end{aligned}$$

Considérons le cas, où les symboles émis de chaque utilisateur sont i.i.d. et de même puissance (le contrôle de puissance est contenu dans la matrice \mathbf{H}). Nous considérons également que le bruit est blanc i.i.d. Dès lors, $\mathbf{R}_d = \sigma_d^2 \mathbf{I}$ et $\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$. Les expressions de $\bar{\mathbf{F}}$ et $\bar{\mathbf{B}}$ deviennent :

$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$	$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{\sigma_w^2} \Sigma^{-2} \mathbf{U}^\dagger^{-1} \mathbf{H}^\dagger$
--	--

où \mathbf{U} et Σ résultent de la décomposition de Cholesky :

$$\sigma_w^{-2} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H} + \sigma_d^{-2} \mathbf{I} = (\Sigma \mathbf{U})^\dagger \Sigma \mathbf{U}$$

B.1.3 Critère EQM bloc d'utilisateur

B.1.3.1 Notations

Nous cherchons ici les matrices optimales $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$ caractérisant le DFE avec critère EQM bloc d'utilisateur. La sortie pondérée de l'égaliseur vérifie :

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{B}^{(k)} \hat{\mathbf{d}}^{(k)} \quad \text{où} \quad \mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \mathbf{n},$$

où la matrice $\mathbf{B}^{(k)}$ doit être strictement triangulaire et les symboles retournés sont supposés exacts $\hat{\mathbf{d}}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k)}$. Les données de ce nouveau problème sont équivalentes aux équations (B.12). Aussi, nous en déduisons directement la solution.

B.1.3.2 Expressions littérales des matrices optimales $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$

Si \mathbf{R}_d et \mathbf{R}_w sont respectivement les matrices de covariance de $\mathbf{d}^{(k)}$ et \mathbf{n} , les matrices optimales sont alors :

$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$	$\mathbf{F}^{(k)} = \Sigma^{-2} \mathbf{U}^\dagger^{-1} \mathbf{H}^{(k) \dagger} \mathbf{R}_n^{-1}$
--	---

où \mathbf{U} et $\mathbf{\Sigma}$ résultent de la décomposition de Cholesky :

$$\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)} = (\mathbf{\Sigma} \mathbf{U})^\dagger \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}.$$

Considérons le cas, où les symboles émis de chaque utilisateur sont i.i.d. et de même puissance (le contrôle de puissance est contenu dans la matrice \mathbf{H}). Nous considérons également que la matrice de covariance de bruit vaut :

$$\mathbf{R}_n = E[\mathbf{nn}^\dagger] = \sigma_w^2 \mathbf{I} + \sigma_d^2 \sum_{j=k+1}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{H}^{(j)\dagger}.$$

Les expressions de $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$ deviennent :

$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$	$\mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{\Sigma}^{-2} \mathbf{U}^{\dagger -1} \mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_n^{-1}$
--	---

où \mathbf{U} et $\mathbf{\Sigma}$ résultent de la décomposition de Cholesky :

$$\sigma_d^{-2} \mathbf{I} + \mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)} = (\mathbf{\Sigma} \mathbf{U})^\dagger \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}.$$

B.2 Méthode mono-utilisateur

B.2.1 Critère EQM bloc d'utilisateur

B.2.1.1 Notations

Nous cherchons ici les matrices optimales $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$ caractérisant le DFE avec critère EQM bloc d'utilisateur. La sortie pondérée de l'égaliseur vérifie :

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{r} - \mathbf{B}^{(k)} \hat{\mathbf{d}}^{(k)}.$$

où la matrice $\mathbf{B}^{(k)}$ doit être strictement triangulaire et les symboles retournés sont supposés exacts $\hat{\mathbf{d}}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k)}$. Le vecteur \mathbf{r} est décomposé selon :

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{d}^{(j)} + \mathbf{w} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \mathbf{n},$$

où le vecteur \mathbf{n} contient les contributions du bruit additif de la transmission \mathbf{w} et de tous les autres utilisateurs. Ce bruit a pour matrice de covariance :

$$\mathbf{R}_n = E[\mathbf{nn}^\dagger] = \mathbf{R}_w + \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^{(j)\dagger}.$$

Ce nouveau problème est équivalent à celui présenté Section B.1.3. Aussi, nous en déduisons directement la solution.

B.2.1.2 Expressions littérales des matrices optimales $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$

La minimisation fournit les matrices optimales :

$$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$$

$$\mathbf{F}^{(k)} = \Sigma^{-2} \mathbf{U}^\dagger^{-1} \mathbf{H}^{(k)} \dagger \mathbf{R}_n^{-1}$$

où \mathbf{U} et Σ résultent de la décomposition de Cholesky :

$$\mathbf{R}_d^{-1} + \mathbf{H}^{(k)} \dagger \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)} = (\Sigma \mathbf{U})^\dagger \Sigma \mathbf{U},$$

et où \mathbf{R}_d est la matrice de covariance des symboles émis et \mathbf{R}_n la matrice de covariance du bruit :

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_w + \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{R}_d \mathbf{H}^{(j)\dagger}.$$

Considérons le cas, où les symboles émis de chaque utilisateur sont i.i.d. et de même puissance (le contrôle de puissance est contenu dans la matrice \mathbf{H}) et que le bruit de la transmission \mathbf{w} est blanc. Les expressions des matrices deviennent :

$$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$$

$$\mathbf{F}^{(k)} = \Sigma^{-2} \mathbf{U}^\dagger^{-1} \mathbf{H}^{(k)} \dagger \mathbf{R}_n^{-1}$$

où \mathbf{U} et Σ résultent de la décomposition de Cholesky :

$$\sigma_d^{-2} \mathbf{I} + \mathbf{H}^{(k)} \dagger \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)} = (\Sigma \mathbf{U})^\dagger \Sigma \mathbf{U},$$

et où

$$\mathbf{R}_n = \sigma_w^2 \mathbf{I} + \sigma_d^2 \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{H}^{(j)\dagger}.$$

Annexe C

Annuleur d'interférences pour le CDMA

C.1 Méthode multi-utilisateurs

C.1.1 Critère EQM symbole

C.1.1.1 Notations

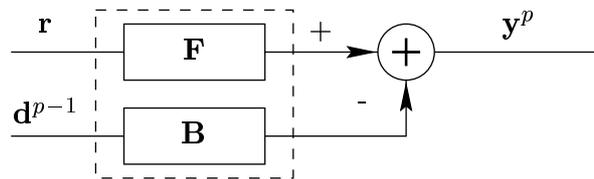


FIG. C.1 – Annuleur d'interférences inter-symbole et multi-utilisateurs à l'itération p .

On cherche ici l'expression des matrices \mathbf{F} et \mathbf{B} qui minimisent le critère d'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de chaque symbole de chaque utilisateur. De plus, nous imposons la contrainte $\mathbf{B}_{i,i} = 0$, ce qui permet d'éviter d'obtenir la solution $\mathbf{F} = 0$ et $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, où \mathbf{I} est la matrice identité. Rappelons que la sortie pondérée de l'égaliseur \mathbf{y}^p vérifie :

$$\mathbf{y}^p = \mathbf{F}\mathbf{r} - \mathbf{B}\mathbf{d}^{p-1}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{w},$$

où \mathbf{d} et \mathbf{w} ont respectivement pour matrice de covariance :

$$\mathbf{R}_d = E[\mathbf{d}\mathbf{d}^\dagger] = \sigma_d^2\mathbf{I}, \quad \mathbf{R}_w = E[\mathbf{w}\mathbf{w}^\dagger].$$

L'entrée de la matrice \mathbf{B} est une estimation des symboles \mathbf{d} issue de l'itération précédente $p - 1$ et que nous notons \mathbf{d}^{p-1} . Nous supposons ici que ces estimées sont exactes i.e. $\mathbf{d}^{p-1} = \mathbf{d}$. Avec cette hypothèse de données retournées exactes, il n'est plus nécessaire de noter le numéro d'itération et dans la suite la sortie pondérée de l'égaliseur se note : \mathbf{y} .

Notons $t = (k - 1)N + n$ l'indice du symbole courant : $d_t = d_n^{(k)}$. L'expression de l'EQM symbole est alors :

$$\text{EQM} = E[|y_t - d_t|^2] \tag{C.1}$$

C.1.1.2 Calcul EQM

De manière à intégrer la contrainte sur \mathbf{B} dans l'expression de l'EQM, nous définissons $\tilde{\mathbf{d}}_t = [d_1 \cdots d_t d_{t+1} \cdots d_{KN}]^T$ et $\tilde{\mathbf{B}}$ la matrice \mathbf{B} dont on a retiré la diagonale.

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{r} - \mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{F}\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{matrix} \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\left[\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \mathbf{f}_t^\dagger \dots \\ \vdots \end{array} \right]}^{QN+W-1} & \underbrace{\left[\begin{array}{c} \vdots \\ \dots \tilde{\mathbf{b}}_t^\dagger \dots \\ \vdots \end{array} \right]}^{KN-1} \\ \hline \mathbf{F} & \tilde{\mathbf{B}} \end{array} \right]}_{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\tilde{\mathbf{d}}_t \end{bmatrix} = [\mathbf{f}_t^\dagger, \tilde{\mathbf{b}}_t^\dagger] \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\tilde{\mathbf{d}}_t \end{bmatrix},$$

où \mathbf{f}_t et \mathbf{b}_t sont respectivement les $t^{\text{ième}}$ colonnes des matrices \mathbf{F}^\dagger et $\tilde{\mathbf{B}}^\dagger$. Avec ces nouvelles notations, l'EQM s'écrit :

$$\text{EQM} = E[|y_t - d_t|^2] = E \left[\left| [\mathbf{f}_t^\dagger, \tilde{\mathbf{b}}_t^\dagger] \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\tilde{\mathbf{d}}_t \end{bmatrix} - d_t \right|^2 \right] \quad (\text{C.2})$$

C.1.1.3 Solution de Wiener

Les vecteurs \mathbf{f}_t et $\tilde{\mathbf{b}}_t$ qui minimisent l'EQM (C.2) sont solution d'un problème de Wiener (cf. Section B.1.1.3) et leurs expressions sont :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_t \\ \tilde{\mathbf{b}}_t \end{bmatrix} = \mathcal{R}^{-1} \mathbf{p},$$

avec

$$\mathcal{R} = E \left[\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\tilde{\mathbf{d}}_t \end{bmatrix} [\mathbf{r}^\dagger, -\tilde{\mathbf{d}}_t^\dagger] \right]$$

$$\mathbf{p} = E \left[d_t^* \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\tilde{\mathbf{d}}_t \end{bmatrix} \right].$$

C.1.1.4 Calcul de \mathbf{p}

\mathbf{p} devient :

$$\mathbf{p} = E \left[d_t^* \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ -\tilde{\mathbf{d}}_t \end{bmatrix} \right] \quad \begin{aligned} E[d_t^* \tilde{\mathbf{d}}_t] &= \mathbf{0} \\ E[d_t^* \mathbf{r}] &= \mathbf{H}E[d_t^* \mathbf{d}] = \sigma_d^2 \mathbf{h}_t \end{aligned}$$

où \mathbf{h}_t est la $t^{\text{ième}}$ colonne de \mathbf{H} , d'où

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \sigma_d^2 \mathbf{h}_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$- \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C} = \sigma_d^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w - \sigma_d^2 \mathbf{H}\bar{\mathbf{I}}_t \mathbf{H}^\dagger = \sigma_d^2 \mathbf{H}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{I}}_t) \mathbf{H}^\dagger + \mathbf{R}_w = \sigma_d^2 \mathbf{h}_t \mathbf{h}_t^\dagger + \mathbf{R}_w$$

$$- \mathcal{A}' = (\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C})^{-1}:$$

Utilisons le lemme d'inversion matricielle (B.16):

$$\mathcal{A}' = (\mathbf{R}_w + \mathbf{h}_t \sigma_d^2 \mathbf{h}_t^\dagger)^{-1} = \mathbf{R}_w^{-1} - \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t \left(\sigma_d^{-2} + \mathbf{h}_t^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t \right)^{-1} \mathbf{h}_t^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} = \mathbf{R}_w^{-1} - \frac{\mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t \mathbf{h}_t^\dagger \mathbf{R}_w^{-1}}{\sigma_d^{-2} + \|\mathbf{h}_t\|_{\mathbf{R}_w}^2}$$

$$\text{avec } \|\mathbf{h}_t\|_{\mathbf{R}_w}^2 = \mathbf{h}_t^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t.$$

$$- \mathcal{D}^{-1}\mathcal{C} = -\tilde{\mathbf{I}}_t \mathbf{H}^\dagger.$$

$$- \mathcal{C}' = -\mathcal{D}^{-1}\mathcal{C}\mathcal{A}'.$$

C.1.1.8 Calcul des matrices de l'annuleur d'interférences

- \mathbf{F} :

$$\mathbf{f}_t = \sigma_d^{-2} \mathcal{A}' \mathbf{h}_t = \sigma_d^{-2} \left(\mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t - \frac{\mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t \mathbf{h}_t^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t}{\sigma_d^{-2} + \|\mathbf{h}_t\|_{\mathbf{R}_w}^2} \right) = \alpha_t \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t,$$

avec $\alpha_t = (\sigma_d^{-2} + \|\mathbf{h}_t\|_{\mathbf{R}_w}^2)^{-1}$. Notons $\mathbf{D} = \text{Diag}(\alpha_1 \cdots \alpha_t \cdots \alpha_{KN})$, où $\text{Diag}(x_1 \cdots x_L)$ représente la matrice diagonale ayant pour élément diagonaux $x_1 \cdots x_L$. Le vecteur \mathbf{f}_t étant la $t^{\text{ième}}$ colonne de la matrice \mathbf{F}^\dagger , on en déduit \mathbf{F}^\dagger :

$$\mathbf{F}^\dagger = \mathbf{D} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}$$

puis \mathbf{F} :

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{D} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{D} = \text{Diag}(\alpha_1 \cdots \alpha_t \cdots \alpha_{KN}) \\ \alpha_t = (\sigma_d^{-2} + \|\mathbf{h}_t\|_{\mathbf{R}_w}^2)^{-1} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

- \mathbf{B} :

$$\tilde{\mathbf{b}}_t = \sigma_d^{-2} \mathcal{C}' \mathbf{h}_t = -\mathcal{D}^{-1} \mathcal{C} \mathbf{f}_t = \alpha_t \tilde{\mathbf{I}}_t \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t.$$

L'expression de $\tilde{\mathbf{b}}_t$ avec la condition $b_{t,t} = 0$ fournit:

$$\mathbf{b}_t = \alpha_t (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{I}}_t) \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_t,$$

puis \mathbf{B}^\dagger :

$$\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{D} \left(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H} - \text{diag}(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}) \right)$$

et enfin \mathbf{B} :

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{D} \left(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H} - \text{diag}(\mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}) \right)} \quad (\text{C.4})$$

où $\text{diag}(\mathbf{A})$ représente la matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux ceux de la matrice \mathbf{A} et où \mathbf{D} est défini ci-dessus (C.3).

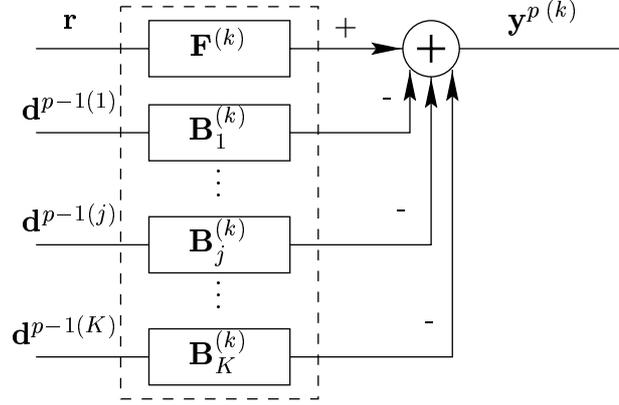


FIG. C.2 – Annuleur d'interférences multi-utilisateurs sous forme bloc.

C.1.1.9 Écriture bloc de l'annuleur d'interférences

De part les expressions (C.3) et (C.4) des matrices optimales \mathbf{F} et \mathbf{B} , nous pouvons les réécrire sous forme de banc de matrices. Le DFE a alors pour structure celle de la Figure C.2.

L'annuleur d'interférences global est séparé pour chaque utilisateur. Considérons l'utilisateur d'intérêt k . La sortie pondérée de l'AI pour l'utilisateur k est :

$$\mathbf{y}^p(k) = \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{r} - \sum_{j=1}^K \mathbf{B}_j^{(k)} \mathbf{d}^{p-1}(j), \quad (\text{C.5})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mathbf{F}^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1}, \\ \mathbf{B}_j^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \left(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}^{(j)} - \delta_{k-j} \text{diag}(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}^{(j)}) \right), \\ \mathbf{D}^{(k)} &= \text{Diag}(\alpha_1^{(k)} \dots \alpha_n^{(k)} \dots \alpha_N^{(k)}), \end{cases}$$

$$\text{où } \alpha_n^{(k)} = \frac{1}{\sigma_d^{-2} + \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_w}^2}, \quad (\text{C.6})$$

$$\text{où } \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_w}^2 = \mathbf{h}_n^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{h}_n^{(k)},$$

et où δ_{k-j} est le symbole de Kronecker. Cette décomposition s'obtient en remarquant :

$$\mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(1)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{(K)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{et } \mathbf{H}^\dagger \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(1)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} [\mathbf{H}^{(1)} \dots \mathbf{H}^{(j)} \dots \mathbf{H}^{(K)}] \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} [\mathbf{H}^{(1)} \dots \mathbf{H}^{(j)} \dots \mathbf{H}^{(K)}] \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{(K)\dagger} \mathbf{R}_w^{-1} [\mathbf{H}^{(1)} \dots \mathbf{H}^{(j)} \dots \mathbf{H}^{(K)}] \end{bmatrix}$$

Dans le cas où le bruit de la transmission \mathbf{w} est blanc de matrice de covariance $\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$, les expressions des matrices deviennent :

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{H}^{(k)\dagger}, \\ \mathbf{B}_j^{(k)} &= \mathbf{D}^{(k)} \left(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{H}^{(j)} - \delta_{k-j} \text{diag}(\mathbf{H}^{(k)\dagger} \mathbf{H}^{(j)}) \right), \\ \mathbf{D}^{(k)} &= \text{Diag}(\alpha_1^{(k)} \dots \alpha_n^{(k)} \dots \alpha_N^{(k)}), \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

$$\text{et où } \alpha_n^{(k)} = \frac{\sigma_d^2}{\sigma_d^2 \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|^2 + \sigma_w^2}. \quad (\text{C.8})$$

C.2 Méthode mono-utilisateur

C.2.1 Critère EQM symbole

C.2.1.1 Notations

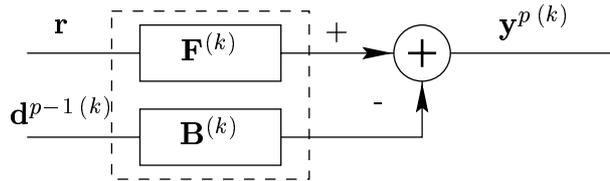


FIG. C.3 – Annuleur d'interférences mono-utilisateur à l'itération p .

On cherche ici l'expression des matrices $\mathbf{F}^{(k)}$ et $\mathbf{B}^{(k)}$ qui minimisent le critère d'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) de chaque symbole pour l'utilisateur d'intérêt k . De plus, nous imposons la contrainte $\mathbf{B}_{i,i}^{(k)} = 0$, ce qui permet d'éviter d'obtenir la solution $\mathbf{F}^{(k)} = 0$ et $\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{I}$, où \mathbf{I} est la matrice identité. Rappelons que la sortie pondérée de l'égaliseur \mathbf{y}^p vérifie :

$$\mathbf{y}^p(k) = \mathbf{F}^{(k)} \mathbf{r} - \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{d}^{p-1}(k), \text{ avec } \mathbf{r} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{d}^{(j)} + \mathbf{w} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} + \mathbf{n},$$

où $\mathbf{d}^{(j)}$ et \mathbf{w} ont respectivement pour matrice de covariance :

$$\mathbf{R}_d = E[\mathbf{d}^{(j)} \mathbf{d}^{(j)\dagger}] = \sigma_d^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{R}_n = E[\mathbf{n} \mathbf{n}^\dagger] = \sigma_d^2 \sum_{j=1, j \neq k}^K \mathbf{H}^{(j)} \mathbf{H}^{(j)\dagger} + \mathbf{R}_n.$$

L'entrée de la matrice $\mathbf{B}^{(k)}$ est une estimation des symboles $\mathbf{d}^{(k)}$ issue de l'itération précédente $p-1$ et que nous notons $\mathbf{d}^{p-1}(k)$. Nous supposons ici que ces estimées sont exactes i.e. $\mathbf{d}^{p-1}(k) = \mathbf{d}^{(k)}$. Avec cette hypothèse de données retournées exactes, il n'est plus nécessaire de noter le numéro d'itération et dans la suite la sortie pondérée de l'égaliseur se note : $\mathbf{y}^{(k)}$.

L'expression de l'EQM symbole est alors :

$$\text{EQM} = E[|y_n^{(k)} - d_n^{(k)}|^2].$$

Ce problème est complètement semblable au problème présenté Section C.1.1.1. En procédant à l'analogie définie ci-dessous :

multi	→	mono
\mathbf{y}^p		$\mathbf{y}^p(k)$
\mathbf{d}		$\mathbf{d}^{(k)}$
\mathbf{w}		\mathbf{n}
\mathbf{H}		$\mathbf{H}^{(k)}$
\mathbf{F}		$\mathbf{F}^{(k)}$
\mathbf{B}		$\mathbf{B}^{(k)}$

nous remarquons que notre problème est complètement semblable au problème présenté Section C.1.1.1. Les matrices optimales sont alors obtenues par analogie avec les résultats de la Section C.1.1.8.

C.2.1.2 Calcul des matrices de l'annuleur d'interférences

– $\mathbf{F}^{(k)}$:

$$\boxed{\mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{H}^{(k) \dagger} \mathbf{R}_n^{-1}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{D}^{(k)} &= \text{Diag}(\alpha_1 \cdots \alpha_t \cdots \alpha_N) \\ \alpha_n^{(k)} &= (\sigma_d^{-2} + \|\mathbf{h}_n^{(k)}\|_{\mathbf{R}_n}^2)^{-1} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

– $\mathbf{B}^{(k)}$:

$$\boxed{\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{D}^{(k)} \left(\mathbf{H}^{(k) \dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)} - \text{diag}(\mathbf{H}^{(k) \dagger} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H}^{(k)}) \right)} \quad (\text{C.10})$$

où $\text{diag}(\mathbf{A})$ représente la matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux ceux de la matrice \mathbf{A} et où \mathbf{D} est défini ci-dessus (C.9).

Si le bruit de la transmission est blanc, i.i.i.d et de puissance σ_w^2 , il suffit de remplacer dans l'expression de la matrice de covariance du bruit $\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_w$ par $\sigma_w^2 \mathbf{I}$.

Bibliographie

- [1] P.D. Alexander, M.C. Reed, J.A. Asenstorfer, C.B. Schlegel, "Iterative multiuser interference reduction: Turbo CDMA," *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 47, No. 7, pp. 1008-1014, July 1999.
- [2] S. L. Ariyavisitakul, Y. G. Li, "Joint coding and decision-feedback equalization for broadband wireless channels," *IEEE Journal on selected areas in Comm.*, Vol. 16, No. 9, pp. 1670-1678, Dec. 1998.
- [3] L.R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, J. Raviv, "Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate," *IEEE Trans. Inf. Th.*, pp. 284-287, March 1974.
- [4] G. Battail, "Pondération des symboles décodés par l'algorithme de Viterbi," *Annales des Télécom.*, No. 1-2, pp. 31-38, Jan. 1987.
- [5] G. Battail, *Théorie de l'information, Application aux techniques de communication*, Masson, 1997.
- [6] G. Bauch, H. Khorram, J. Hagenauer, "Iterative equalization and decoding in mobile communications," *EPMCC'97*, Bonn, Germany, pp. 307-312, Sept-Oct. 1997.
- [7] G. Bauch, V. Franz, "A comparison of soft-in/soft-output algorithms for Turbo-detection," *International Conference on Telecomm. (ICT'97)*, Porto Carras, Greece, Vol. 2, pp. 259-263, June 1998.
- [8] C.A. Belfiore, J.H. Park Jr., "Decision feedback equalization," *Proc. IEEE*, Vol. 67, No. 8, pp. 1143-1156, August 1979.
- [9] N. Benvenuto, R. Marchenasi, "The Viterbi algorithm for sparse channels," *IEEE Trans. on Comm*, Vol. 44, No. 3, pp. 287-289, March 1996.
- [10] C. Berrou, A. Glavieux, P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error-correcting and decoding: Turbo-codes," *Proc. ICC*, Geneva, pp. 1064-1070, May 1993.
- [11] C. Berrou, P. Adde, E. Angui, S. Faudeil, "A low-complexity soft-output Viterbi decoder architecture," *Proc. ICC*, Geneva, pp. 737-740, May 1993.
- [12] C. Berrou, A. Glavieux, "Near optimum error correcting coding and decoding," *IEEE Trans. on Comm*, Vol. 44, No. 10, pp. 1262-1271, October 1996.
- [13] C. Berrou, "Some clinical aspects of Turbo-codes," *Int. Symp. on Turbo-codes*, Brest, France, pp. 26-31, 1997.
- [14] E. Biglieri, "Coding for the fading channel," *IEEE 50th Vehicular Technology Conference*, Tutorial 11, Amsterdam, The Netherlands, September 1999.

- [15] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, *Introduction à l'algorithmique*, Dunod, 1994.
- [16] R.B. D'Agostino, E.S. Pearson, "Test for departures from normality. Empirical results for the distributions of b_2 and $\sqrt{(b_1)}$," *Biometrika*, Vol. 60, pp. 613-622, 1973.
- [17] F. Desbouvries, "Rangs de déplacement et algorithmes rapides," *Thèse de l'ENST Paris*, Janvier 1991.
- [18] P. Didier, "La Turbo-égalisation et son application aux communications radiomobiles," *Thèse de l'Université de Bretagne occidentale*, Décembre 1996.
- [19] P. Duvaut, *Traitement du signal, concepts et applications*, 2^{ième} édition, Hermès, Paris, 1994.
- [20] C. Douillard, M. Jezequel, C. Berrou, A. Picart, P. Didier, A. Glavieux, "Iterative correction of intersymbol interference: Turbo-equalization," *Europ. Trans. on Telecomm.*, vol. 6, pp. 507-511, 1995.
- [21] E. V. Eyuboglu, S. U. H. Qureshi, "Reduced-state sequence estimation with set partitioning and decision feedback," *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 36, No. 1, pp. 13-20, Jan. 1988.
- [22] E. V. Eyuboglu, "Detection of coded modulation signals on linear, severely distorted channels using decision-feedback noise prediction with interleaving," *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 36, No. 4, pp. 401-409, Apr. 1988.
- [23] I. Fijalkow, A. Roumy, S. Ronger, D. Pirez, P. Vila, "Improved interference cancellation for Turbo-equalization," *IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Turkey, June 2000.
- [24] G. D. Forney Jr. "Maximum likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interference," *IEEE Trans. Inf. Th.*, Vol. IT-18, No. 3, pp. 363-378, May 1972.
- [25] G. D. Forney Jr., "The Viterbi algorithm," *Proc. IEEE*, Vol. 61, pp. 268-278, March 1973.
- [26] T. R. Giallorenzi, S. G. Wilson, "Multiuser ML sequence estimator for convolutionally coded asynchronous DS-CDMA systems," *IEEE Trans. on Comm.*, Vol. 44, No. 8, pp. 997-1008, August 1996.
- [27] T. R. Giallorenzi, S. G. Wilson, "Suboptimum multiuser receivers for convolutionally coded asynchronous DS-CDMA systems," *IEEE Trans. on Comm.*, Vol. 44, No. 9, pp. 1183-1196, Sept. 1996.
- [28] A. Glavieux, M. Joindot, *Communications numériques, Introduction*, Masson, 1996.
- [29] A. Glavieux, C. Laot, J. Labat, "Turbo-equalization over a frequency selective channel," *Int. Symp. on Turbo-codes*, Brest, France, pp. 96-102, 1997.
- [30] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix computations (3rd edition)*, The John Hopkins Univ. Press, 1996.
- [31] A. Grant, "Joint multiuser decoding and channel estimation," *Séminaire ETIS*, Cergy, France, June 2000.

- [32] J. Hagenauer, P. Hoeher, "A Viterbi algorithm with soft-decision outputs and its application," *Proc. Globecom'89*, pp. 47.11-47.17, Nov. 1989.
- [33] J. Hagenauer, E. Offer, L. Papke, "Iterative decoding of binary block and convolutional codes," *IEEE Trans. on Inf. Th.*, Vol. 42, No. 2, pp. 429-445, March 1996.
- [34] J. Hagenauer, "Forward error correcting for CDMA systems," *IEEE Fourth International Symposium on Spread Spectrum Techniques & Applications*, Sept. 1996.
- [35] J. Hagenauer, "The Turbo principle: Tutorial introduction and state of the art," *Int. Symp. on Turbo-codes*, Brest, France, pp. 1-11, 1997.
- [36] R. Herzog, "Interference cancellation for a high data rate user in coded CDMA systems," *IEEE Int. Conf. on Comm. (ICC'98)*, Atlanta, USA, pp. 709-713, June 1998.
- [37] E. Jaffrot, M. Siala "Turbo channel estimation for OFDM systems on highly time and frequency selective channels," *IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Turkey, June 2000.
- [38] R. Kennedy, B. Anderson, R. Bitmead, "Channels leading to rapid error recovery for DFE's," *IEEE Trans. on Comm.*, Vol. 37, No. 11, pp. 1126-1135, Nov. 1989.
- [39] A. Klein, G. Kawas Kaleh, P. W. Baier, "Zero forcing and minimum mean-square-error equalization for multiuser detection in CDMA channels," *IEEE Trans. on Veh. Tech.*, Vol. 45, No. 2, pp. 276-287, March 1996.
- [40] W. Koch, "Combined design of equalizer and channel decoder for digital mobile radio receivers," *Stochastic models & methods in information technology.*, Nürnberg, Germany, pp. 263-270, Apr. 1989.
- [41] W. Koch, A. Baier, "Optimum and sub-optimum detection of coded data disturbed by time-varying intersymbol interference," *Proc. GLOBECOM 90*, San Diego, USA, Vol. 3, pp. 1679-1684, Dec. 1990.
- [42] E. L. Kuan, L. Hanzo, "Joint detection CDMA techniques for third-generation transceivers," *Proc. ACTS Mobile Communication Summit 98*, Rhodes, Greece, June 1998.
- [43] C. Laot, "Egalisation autodidacte et Turbo-égalisation, application aux canaux sélectifs en fréquence," *Thèse de l'Université de Rennes 1*, Juillet 1997.
- [44] E.A. Lee, D.G. Messerschmitt, *Digital Communication (2nd edition)*, Kluwer, 1996.
- [45] Y. Li, B. Vucetic, Y. Sato, "Optimum soft-output detection for channels with intersymbol interference," *IEEE Trans. on Inf. Th.*, Vol. 41, No. 3, pp. 704-713, May 1995.
- [46] J-P. M.G. Linmartz's, *Wireless communication, The interactive multimedia CD-ROM*, Baltzer Science Publishers, Vol. 1, No. 1, 1996.
- [47] R. Lupas, S. Verdú, "Linear multiuser detectors for synchronous code division multiple access channels," *IEEE Trans. on Inf. Th.*, Vol. 35, No. 1, pp. 123-136, Jan. 1989.
- [48] R. Lupas, S. Verdú, "Near-far resistance of multiuser detectors in asynchronous channels," *IEEE Trans. on Comm.*, Vol. 38, No. 4, pp. 496-508, Apr. 1990.

- [49] D. J.C. MacKay, *Information theory, inference and learning algorithms*, available at <http://wol.ra.phy.cam.ac.uk/mackay/>, Draft 2.0.7 Feb. 14, 2000.
- [50] R. Mehlman, H. Meyr, "Soft output M-algorithm equalizer and trellis coded modulation for mobile radio communication," *Proc. IEEE Vehicular Technology Society 42nd Conference*, Denver, USA, Vol. 2, pp. 586-591, May 1992.
- [51] F. Michaut, *Méthodes adaptatives pour le signal*, Hermès, Paris, 1992.
- [52] P. Mohanraj, D. D. Falconer, T. A. Kwasniewski, "Baseband trellis-coded modulation with combined equalization/decoding for high bit rate digital subscriber loops," *IEEE Journal on selected areas in Comm.*, Vol. 9, No. 6, pp. 871-875, Aug. 1991.
- [53] S. Perreau, L. B. White, P. Duhamel, "An equalizer including a soft channel decoder," *Proc. SPAWC*, Paris, pp. 9-12, 1997.
- [54] D. Pirez, D. Merel, "Comparaison entre les formes d'onde série et parallèle pour les transmissions HF," *Advisory Group for Aerospace Research & Development, AGARD Symposium*, Athens, Greece, pp. 19.1-19-7, Sept. 1995.
- [55] B. Porat, B. Friedlander, "Blind equalization of digital communications channels using high order moments," *IEEE Trans. of Sig. Proc.*, Vol. 39, No. 2, pp. 522-526, Feb. 1991.
- [56] J.G. Proakis, *Digital Communications (3rd edition)*, McGraw-Hill, 1995.
- [57] R. Pyndiah, A. Glavieux, A. Picart, S. Jacq "Near optimum decoding of product codes," *Proc. Globecom*, San Francisco, pp. 339-343, Nov. Dec. 1994.
- [58] S. U. H. Qureshi, "Adaptive equalization," *Proc. IEEE*, Vol. 73, No. 9, pp. 1349-1387, Sept. 1985.
- [59] M.C. Reed, C.B. Schlegel, P.D. Alexander, J.A. Asenstorfer, "Iterative multiuser detection for CDMA with FEC: near single user performance," *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 46, No. 12, pp. 1693-1699, Dec. 1998.
- [60] A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez P. Duvaut, "Quelques aspects de la Turbo-égalisation," *17th Symposium on Signal and Image processing, GretsI*, pp. 801-804, Vannes, France, Sept. 1999.
- [61] A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Joint equalization and decoding: why choose the iterative solution?," *IEEE 50th Vehicular Technology Conference*, pp. 2989-2993, Amsterdam, The Netherlands, September 1999.
- [62] A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, P. Duvaut, "Iterative multiuser algorithm for convolutionally coded asynchronous DS-CDMA systems: Turbo-CDMA," *IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Turkey, June 2000.
- [63] A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Full Turbo receiver for coded asynchronous DS-CDMA over multipath channel," *IEEE 2nd International Symposium on Turbo-codes & Related Topics*, Brest, France, Sept. 2000.
- [64] A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, "Turbo multiuser detection for coded asynchronous DS-CDMA over frequency selective channels," *IEEE Sixth International Symposium on Spread Spectrum Techniques & Applications (ISSSTA '00)*, New Jersey, USA, Sept. 2000.

- [65] A. Roumy, I. Fijalkow, D. Pirez, “Low-Cost Turbo receivers for coded asynchronous DS-CDMA in frequency selective channels,” soumis à *IEEE Journal on Selected Areas in Comm.*, special issue: The Turbo-principle: from theory to practice, le 1 Mai 2000.
- [66] P. Robertson, E. Villebrun, P. Höher, “A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operating in log domain,” *IEEE ICC*, pp. 1009-1013, 1995.
- [67] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *Bell Syst. Tech. J.*, July and Oct. 1948.
- [68] G. Ungerboeck, “Adaptive maximum-likelihood receiver for carrier-modulated data transmission systems,” *IEEE Trans. Comm.*, Vol. COM-22, No. 5, pp. 624-636, May 1974.
- [69] G. Ungerboeck, “Channel coding with multilevel/phase signals,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, Vol. IT-28, pp. 55-67, Jan. 1982.
- [70] R. Vallet, “Symbol by symbol MAP detection and the Baum-Welch algorithm in digital communications,” *Signal Processing IV: Theories and applications*, pp. 131-134, 1992.
- [71] S. Verdú, “Minimum Probability of error for asynchronous Gaussian multiple-access channels,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, Vol. 32, pp. 85-96, Jan. 1986.
- [72] S. Verdú, *Multiuser detection*, Cambridge Univ. Press, 1998.
- [73] S. Verdú, S. Shamai, “Spectral efficiency of CDMA with random spreading,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, Vol. 45, No. 2, pp. 622-640, March 1999.
- [74] A. J. Viterbi, J. K. Omura, *Principles of Digital Communication and Coding*, McGraw-Hill, 1979.
- [75] A. J. Viterbi, J. K. Omura, traduit par G. Battail, *Principes des communications numériques*, Dunod, 1982.
- [76] A. J. Viterbi, “An intuitive justification and a simplified implementation of the MAP decoder for convolutional codes,” *IEEE JSAC*, Vol. 16, No. 2, pp. 260-264, Feb. 1998.
- [77] T. Wang, C.-L. Wang, “On adaptive decision-feedback equalization of intersymbol interference channels in coded modulation systems,” *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 44, No. 11, pp. 1404-1408, Nov. 1996.
- [78] X. Wang, H.V. Poor, “Iterative (Turbo) soft interference cancellation and decoding for coded CDMA,” *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 47, No. 7, pp. 1046-1061, July 1999.
- [79] J. K. Wolf, “Efficient maximum likelihood decoding of linear block codes using trellis,” *IEEE Trans. on Inf. Th.*, Vol. 24, No. 1, pp. 76-80, Jan. 1978.
- [80] K. Zhou, J. G. Proakis, F. Ling, “Decision-feedback equalization of time-dispersive channels with coded modulation,” *IEEE Trans. Comm.*, Vol. 38, No. 1, pp. 18-24, Jan. 1990.

Egalisation et décodage conjoints : méthodes Turbo

Afin d'assurer des transmissions fiables et à débit élevé, les récepteurs utilisent le décodage de canal mais doivent également combattre les interférences entre symboles apportées par les canaux sélectifs en fréquence. Si pour des raisons de complexité, les récepteurs classiques opèrent l'égalisation et le décodage de manière disjointe, cette approche n'est pas optimale. Aussi, nous sommes intéressés à des techniques d'égalisation et de décodage conjoints mais sous-optimales pour maintenir une complexité réduite.

Ainsi, nous avons étudié le Turbo-égaliseur, qui applique le principe itératif des Turbo-codes à notre contexte. Afin de mettre en évidence la perte due à la sous-optimalité du Turbo-égaliseur, nous avons calculé les performances asymptotiques de la solution optimale (au sens MAP) au problème de l'égalisation et du décodage conjoints et avons montré qu'elles peuvent différer de la borne « BABG codé ». Puis, nous avons proposé une analyse fonctionnelle du processus itératif qui permet de prédire les performances et en particulier le point de déclenchement de l'effet Turbo. Cette analyse a également montré que le modèle blanc gaussien est insuffisant pour représenter l'erreur à l'entrée du décodeur.

Nous avons ensuite étendu l'approche de la Turbo-égalisation à la détection multi-utilisateurs, qui traite les interférences entre symboles mais aussi entre utilisateurs. Cette généralisation a conduit à une première structure, que nous avons ensuite améliorée sans augmenter la complexité. Pour ce faire, nous avons proposé d'une part un nouvel ordre de démodulation des utilisateurs, qui tient compte des interférences et d'autre part une nouvelle structure série appelée « Full ».

Joint equalization and decoding: Turbo methods

In high rate communication, where the transmitted signal is subject to intersymbol interference (ISI), we may use equalization to reduce the effect of ISI and channel coding to correct remaining errors. A conventional equalizer does not make use of the redundancy introduced by the channel coding: equalization and decoding are disjoint which is not optimal in the sense of the minimization of the error probability. Since optimal joint equalization and decoding is an NP-complete problem, we consider a relevant trade-off between complexity and performance: that is the Turbo-equalizer.

We first compare the performance of the Turbo-equalizer with that of the optimal joint receiver. Results show that the gap between the Turbo-equalizer and the decoder over AWGN channel is not only due to the sub-optimal processing but also to the channel. Next, we study the evolution of the effective error variance through the iterative process involved in the Turbo-equalizer. This allows prediction of the performance and gives insight into phenomena observed using the Turbo-equalizer (trigger point). Based on this analysis, we propose a definition of a "tough" channel, when processed by the Turbo-equalizer.

In the last section, the application of the Turbo-equalizer to CDMA is outlined. In order to improve this Turbo-CDMA receiver without increasing complexity, we then propose a new structure called Full-Turbo CDMA since it fully uses the decoded information. This Full receiver enhances performance at the expense of an extra processing delay. Noticing that a good order of demodulation is very effective in improving performance, we propose a new criterion for the order of demodulation. It takes into account both Intersymbol- and Multiuser interferences.